МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою програмою
«Інженерія програмного забезпечення інтелектуальних кібер-фізичних систем і
веб-технологій»
спеціальності 121 - «Інженерія програмного забезпечення»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Теорія ймовірностей. [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студентів спеціальності 121 - «Інженерія програмного забезпечення» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Ю.В. Сидоренко. – Електронні текстові дані (1 файл: 1,22 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 81 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 4 від 10.12.2020р.)
за поданням Вченої ради теплоенергетичного факультету (протокол № 5 від 30.11.2020 р.)

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Укладач: Сидоренко Юлія Всеволодівна, канд. техн. наук, доц.

Відповідальний редактор: *Шаповалова С. І., канд. техн. наук, доцент*

Рецензент: *Рачинський А.Ю., канд. техн. наук,*
доцент кафедри ТЕУТ та АЕС ТЕФ

Посібник розроблений на підставі робочої програми кредитного модуля «Теорія ймовірностей» та призначений для якісного засвоєння матеріалу студентами.

Призначений для студентів, які навчаються за спеціальністю 121 - «Інженерія програмного забезпечення».

Спрямований на формування у студентів уміння вибирати та перетворювати математичні моделі явищ, процесів і систем для їх ефективної програмно-апаратної реалізації, володіти знаннями для знаходження ймовірності випадкових подій, числових характеристик випадкових величин та уміння працювати з законами розподілу випадкових величин. Забезпечує студентів необхідними прикладами виконання завдань, запланованих впродовж семестру.

ЗМІСТ

1. ВСТУП

Випадковим нам здається те, що порушує усталений перебіг подій. Наприклад, ви спізнилися на автобус; планували подивитися телевізор, але в будинку вимкнули світло; чекали дзвінка, однак зламався телефон; зібралися на прогулянку, проте зіпсувалася погода. Це все неприємні випадки. Можна навести й інші приклади: виграш завдяки лотерейному білету чи несподівана зустріч старого друга... Проте, загальною рисою усіх таких випадковостей є те, що вони порушують нормальний, планований перебіг подій. Саме тому нерідко ми кажемо: з випадковостями треба боротися.

У суспільному житті випадкові події теж можуть траплятися. Уявіть собі, що на певній ділянці врожай якоїсь сільськогосподарської культури знищений через несподівану засуху. Це тяжкий випадок. Землетрус — поки що не передбачений випадок. Але наука прагне дати людині обґрунтовані засоби боротьби з несприятливими ситуаціями.

2. ЗАКОНОМІРНОСТІ ВИПАДКОВИХ ЯВИЩ

На перший погляд може здаватися, що жодних законів, які керують випадковими подіями, бути не може: саме тому ці події і є випадковими. Однак випадкові явища часто не є хаотичними. Зазвичай виявляють певні закономірності. Розглянемо простий приклад, за допомогою якого легко зрозуміти загальні закони випадку. Уявіть собі, що ви кидаєте на стіл монету й дивитеся, на який бік вона впаде. Можливі два варіанти: або монета впаде на стіл гербом, або згори опиниться решка. Кидаючи монету тільки один раз, не можна передбачити, якою стороною вона впаде. Але якщо кидати монету сто разів поспіль, тоді можна багато сказати про те, скільки разів згори опиниться один і скільки другий бік монети. Можна впевнено стверджувати, що герб випаде не один і не два рази, а більше, але й не 98 чи 99 разів, а менше. Адже монета зроблена дуже точно, і під час підкидання жодний бік її не має привілеїв перед іншим. Тому природно очікувати, що приблизно в половині випадків монета випаде гербом і ще в половині — решкою. Отож кількість випадінь герба, певно, буде близькою до 50. Але не можна стверджувати, що ця кількість точно дорівнюватиме 50. Тимчасом можна впевнено говорити, що кількість випадінь герба перебуватиме в інтервалі між 40 і 60.

Це явище можемо передбачити ще точніше, і не буде надто сміливим заздалегідь завбачити, що кількість випадінь герба коливатиметься між 43 і 57. Але, скільки разів точно випаде герб, передбачити не можна: це залежить від випадку. Точніше можна підрахувати, що коли кидати монету по сто разів поспіль знову і знову, то лише приблизно в 15% випадків число випадінь герба буде більше 57 або менше 43.

Якщо влучність якого-небудь стрільця становить 93%, то можна передбачити, що з наступних 100 пострілів, які він тільки збирається зробити, вдалими будуть майже 93 постріли. Отож упевнено можна стверджувати, що кількість влучань буде понад 80.

Розглянемо третій приклад закономірності, що, на перший погляд, належить цілком випадковим явищам. Коли в сім'ї має народитися дитина, ніхто не може заздалегідь передбачити, хто це буде: хлопчик чи дівчинка. Але в усіх країнах і серед усіх народів завжди на 1000 народжених в середньому припадає 511 хлопчиків і 489 дівчаток. На цій разючій постійності відсотка народжень хлопчиків і дівчаток наголошувало багато вчених, серед яких був й один із фундаторів теорії ймовірностей — французький математик *Сімон Лаплас (1749-1827).* Переглядаючи свого часу списки народжених у Парижі за 1745-1784 рр., Лаплас виявив, що відношення кількості хлопчиків до загальної кількості народжених дорівнювало приблизно 0.510, тобто, трохи менше ніж 0.511. Лаплас з’ясував: є особлива причина, через яку народжуваність дівчаток зросла, адже кількість народжених у Парижі за 39 років і в ті часи вже була надто великою. Тому навіть таке мале відхилення від звичайного співвідношення не можна було пояснити дією випадку.

І справді, Лаплас виявив причину відхилення: вона полягала в тому, що в кількість дітей, народжених у Парижі, включалися також і діти, підкинуті в спеціальний притулок — єдиний на всю Францію. Оскільки французькі селяни цінували в синах майбутніх робітників, то вони частіше підкидали дівчаток, ніж хлопчиків.

Виключивши підкидьків із кількості народжених, Лаплас одержав і для Парижа звичайне співвідношення кількості хлопчиків та дівчаток. Таким чином, він показав, що за високої народжуваності можна передбачити загальну кількість хлопчиків з точністю до 0.1% : відхилення такого порядку може пояснюватися тільки якимись особливими причинами.

Ці закономірності можна висловити мовою математики.

Нехай маємо подію A, що в кожному окремому випадку може статися або не статися. Нехай проведено N випробувань, з яких у M випадках подія A сталася, а в (N-M) випадках – не сталася. Частота події A (тобто, частка випробувань, у яких є подія A) тут дорівнює M/N. При цьому для великих N частота події виявляється приблизно постійною; так, наприклад, спостерігаючи за підкиданням монети, бачимо, що частота випадання герба завжди близька до 1/2, а в разі визначення статі новонароджених частота народження хлопчиків близька до 0.511. Основний закон випадкових явищ якраз і полягає в стійкості частоти певної події за дуже великої кількості спроб. При цьому чим більша кількість спроб, тим менші будуть випадкові відхилення частоти від середнього її значення.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Наведіть приклади випадкових явищ.

3. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ В ІГРАХ

Теорія ймовірностей створювалася й формувалася на основі азартних ігор. Вона почала розвиватися в XVII столітті внаслідок розв'язання питань, що поставали під час гри в кості. Математики щодо цього жартують, мовляв, безглузда гра в кості породила велику мудру науку, тоді як розумна гра в шахи в історії розвитку науки жодної ролі не відіграла.

Наведемо деякі прості задачі з тих, що були розв'язані ще в XVII столітті.

- *Кидаємо на стіл гральний кубик. Яка ймовірність того, що при цьому на верхній грані випаде число 5?*

Усіх можливостей лягти на стіл тією чи тією гранню для кубика є 6. Оскільки всі грані рівноправні, то кожна з них випадатиме в одній шостій від загальної кількості випадків, тобто: $P(5) = 1/6$,

де P(5) — імовірність випадання п'ятірки.

- *Яка ймовірність того, що за підкидання грального кубика випаде парне число очок?*

Сприятливих можливостей тут буде три: випадіння чисел 2, 4, 6.
Тому P(парне)=3\6=1\2.

- *Яка ймовірність одночасного випадання числа 5 на двох кубиках?*

Підкидаючи два гральні кубики, матимемо 36 можливих випадків: (1,1), (1,2), (1,3), ... , (6,6). Усі ці випадки цілком рівноправні, тому P(5,5)=1/36.

Можна побачити, що, як виявилося, *P(5,5)= P(5)* • *P(5).* Це співвідношення є окремим випадком теореми добутку ймовірностей.

Можна навести цікавий історичний приклад. Один французький лицар, кавалер де Мере, був пристрасним гравцем у кості. Він всіляко намагався розбагатіти за допомогою гри і для цього вигадував різні ускладнені правила, які, як він уважав, приведуть його до цілі. Де Мере придумав такі правила гри: він пропонував підкинути один гральний кубик чотири рази поспіль і бився об заклад, що при цьому хоч би один раз випаде 6. Якщо ж цього не ставалося, ані разу не випадало 6 очок, то вигравав його суперник. Точне значення ймовірності того, що в цих умовах випаде 6, тоді було невідоме, хоча очевидно, що воно близьке до 1/2. Де Мере припускав, що він частіше вигравати́ме, ніж програватиме, але все ж таки звернувся до свого знайомого, одного з видатних математиків XVII століття — *Блеза Паскаля (1623-1662)* з проханням розрахувати, яка ймовірність виграшу у вигаданій ним грі.

Наведемо розрахунок Паскаля. За кожного окремого підкидання грального кубика ймовірність випадання 6 дорівнює 1/6. Імовірність того, що не випаде 6 очок — 5/6. Далі, нехай ми кинемо гральний кубик двічі. Повторимо спробу (двоpазове викидання кубика) багаторазово, скажімо, N раз. Тоді приблизно в 5/6 із цих N випадків на кубику, підкинутому перші 5 разів, не випаде 6. З усього цього приблизно в (5/6)*N, тобто всього в(5/6)*((5/6)*N) випадків не випаде 6 і за другого підкидання кубика. Отож за дворазового підкидання кубика ймовірність того, що жодного разу не випаде 6 очок, дорівнює

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}.$$

Так само ймовірність того, що жодного разу не випаде 6 за трикратного підкидання грального кубика, дорівнює

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}.$$

Нарешті, ймовірність того, що за чотирикратного підкидання жодного разу не випаде 6, дорівнює

$$\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{625}{1296}$$

Таким чином, для лицаря де Мере ймовірність програшу дорівнювала 625/1296, тобто менше 1/2, а значить – імовірність виграшу була понад половину. Отже, у кожній грі було понад половину шансів, що лицар виграє, а за багаторазового повторення гри він майже достеменно вигравав.

Справді, чим більше лицар грав, тим більше він вигравав. Кавалер де Мере був дуже задоволений і вирішив, що він відкрив точний спосіб збагачення. Проте, поступово іншим гравцям стало очевидно, що ця гра не вигідна, і вони перестали грати з де Мере. Треба було вигадувати якісь інші правила, і де Мере придумав нову гру. Він запропонував кидати кості 24 рази й бився об заклад, що згори хоча б один раз опиняться дві п'ятірки. Де Мере вважав, що і в цій грі він частіше вигравати́ме, ніж програватиме. Але тепер лицар помилився. Імовірність, що одночасно випадуть дві п’ятірки за підкидання двох гральних кубиків, дорівнює 1/36, тому ймовірність того, що дві п’ятірки не випадуть, дорівнює 35/36. Імовірність, що за 24-кратного підкидання двох гральних кубиків жодного разу не випадуть дві п’ятірки, дорівнює, відповідно, $(35/36)^{24}$, що більше ніж 1/2.

Отже, для лицаря ймовірність програшу була понад половину. Це означало, що чим більше лицар гратиме, тим більше він буде програвати. Так і сталося. Чим більше він грав, тим більше програвав, аж поки не став жебраком.

Найцікавішим у цьому історичному анекдоті є те, що завдяки таким своєрідним «практичним запитам» з'явилася теорія розрахунку ймовірностей випадкових явищ.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Яка ймовірність одночасного випадання числа 3 на двох кубиках?
2. Яка ймовірність того, що за підкидання грального кубика випаде непарне число очок?

4. ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

У XVII столітті теорією ймовірностей займалися такі видатні математики, як французи Б. Паскаль і П. Ферма та голландець Х. Гюйгенс. При цьому перші внески в теорію ймовірностей зроблено завдяки вивченню азартних ігор.

Проте вже в кінці XVII ст. почали застосовувати теорію ймовірностей, страхуючи кораблі від випадковостей, тобто почали підраховувати, скільки шансів на те, що корабель повернеться в порт неушкодженим, що його не затопить буря, не захоплять пірати, що вантаж на ньому не зіпсується, не згорить тощо. Такий розрахунок дозволяє визначити, яку страхову премію треба виплачувати власникові вантажу (якщо корабель не повернеться в порт чи якщо вантаж зіпсується), щоб вигідно власникові страхової контори.

У першій половині XVIII ст. для розвитку теорії ймовірностей досить багато зробив швейцарець Якоб Бернуллі. Його наступниками були французькі академіки С. Лаплас і С. Д. Пуассон та визначний німецький математик К. Ф. Гаус, які працювали в кінці XVIII – на початку XIX ст.

Попри все, протягом XVIII ст. і першої половини XIX ст. теорія ймовірностей у певному розумінні топталася на місці: тоді ще не було зрозуміло зв'язку між різноманітними явищами життя й наукою про масові явища [4]. У середині XIX ст. вагомі зрушення в теорії ймовірностей зробили праці видатного математика П. Л. Чебишова. Він знайшов нові способи розв'язання раніше поставлених задач і зумів зібрати навколо себе велику групу молодих учених, дехто з яких згодом набув світової слави. Насамперед тут варто згадати А. А. Маркова, О. М. Ляпунова. Дещо пізніше розгорнулася діяльність академіків С. Н. Бернштейна й А. М. Колмогорова, які підтримали традиції школи ймовірностей, що, безперечно, посідає одне з перших місць у світовій науці.

Задачі для самостійного розв'язання

1.Які ще відомі математики займались розвитком теорії ймовірностей?

5. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Поступово в XIX ст. багато фізиків дійшли висновку, що теорію ймовірностей можна застосувати й до фізичних явищ. У другій половині XIX ст. у роботах англійця К. Максвелла, австрійця Л. Больцмана й американця Д. В. Гіббса зародилася так звана статистична фізика – галузь фізики, що спеціально вивчає величезні сукупності атомів та молекул, з яких складається будь-яка речовина, з погляду теорії ймовірностей.

Останнім часом, наприклад, теорія ймовірностей знайшла застосування і в астрономії. Значення теорії ймовірностей для астрономії зросло відтоді, як астрономи почали вивчати не тільки окремі планети та зірки, а й зіркові скупчення, а також позагалактичні туманності, або галактики, що складаються з неймовірно великої кількості окремих зірок.

Атомна фізика. Автоматичні телефонні станції. Картографія й народознавство. Петрографія та містобудування. Статистична обробка даних. Лотереї і страхування. Банківська справа й матеріально-фінансові структури. Дослідження операцій. Теорія інформації від азбуки Морзе й побудови клавіатури до проблем кібернетики, основним математичним апаратом якої вона є. Це лише невелика частина галузей пізнання, де теорія ймовірностей знайшла своє застосування. Роль теорії ймовірностей особливо зростає в наш час. Виникають нові великі розділи, що одразу ж знаходять різноманітне застосування[8]. Цілком природно, що найближчим часом жодний інженер не зможе обійтися без цієї науки; у майбутньому знання теорії ймовірностей буде необхідним для кожної освіченої людини.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Наведіть приклади застосування теорії ймовірностей.

6. ЗАГАЛЬНІ ПРАВИЛА КОМБІНАТОРИКИ

Розглянемо k множин $M_1, M_2, M_3, ..., M_k$, що містять по $m_1, m_2, m_3, ..., m_k$ елементів відповідно. Вибирається по одному елементу з кожної множини і складається ще одна множина. Кількість способів, якими можна вибрати по одному елементу з кожної множини, дорівнює добутку $m_1 * m_2 * m_3 * ... * m_n$. У цьому й полягає основний принцип комбінаторики.

У задачах теорії ймовірностей часто розглядають різні з'єднання (комбінації) з множини **n** елементів по **k** елементах ($k \le n$). Будемо розглядати такі з'єднання, до яких кожний елемент даної множини може входити не більше ніж один раз, тобто, комбінації без повторень.

Розглянемо три види таких з'єднань:

- розміщення;
- перестановки;
- сполуки.

Визначення. **Розміщеннями** з ***n*** елементів по ***k*** елементах називаються підмножини ***k*** елементів, які відрізняються одне від одного або самими елементами, або їх порядком. Кількість розміщень позначається A_n^k

Теорема. Кількість розміщень з ***n*** елементів по ***k*** елементах дорівнює:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1)).$$

Доведення. Для того щоб розташувати ***k*** елементів у певному порядку, оберемо один із них і будемо вважати його *«першим».* Це можна зробити ***n*** способами. Множина, що залишилася, містить ***(n-1)*** елементів. З неї оберемо один і назвемо його *«другим».* Для вибору другого елемента є ***(n-1)*** спосіб. Залишилася множина з ***(n-2)*** елементів. Вибираємо з неї один елемент і називаємо його *«третім»,* що можна зробити ***(n-2)*** способами. Продовжуючи процес відбору, останній ***k***-й елемент можна обрати ***(n-(к-1))*** способом. Згідно з основним принципом комбінаторики, кількість усіх способів, якими можна їх розмістити, тобто кількість розміщень, дорівнює:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1)).$$

Задача 1. Визначити, скільки тризначних чисел можна скласти з множини цифр 1, 2, 3, 4, 5 без повторень.

Розв'язок. Маємо $n = 5,\ k = 3$

$$A_5^3 = 5*4*3 = 60.$$

Задача 2. Скількома способами можна розсадити 10 юнаків групи з 17-ти, враховуючи різні варіанти контрольної роботи?

Розв'язок. Маємо $n = 17,\ k = 10$

$$A_{17}^{10} = \frac{17!}{(17-10)!} = \frac{17!}{7!}.$$

Задача 3. У коробочці картографа 12 фломастерів. Визначити, скільки різних географічних карт можна одержати, якщо 8 країн треба замалювати різними кольорами.

Розв'язок. Маємо $n = 12,\ k = 8$

$$A_{12}^{8} = \frac{12!}{(12-8)!} = \frac{12!}{4!}$$

.

Визначення. **Перестановками** з даних ***n*** елементів називаються множини з ***n*** елементів, що відрізняються тільки порядком входження.

Перестановки — це окремий випадок розміщень. Кількість усіх перестановок позначають символом Pn. Кількість Pn знаходиться за формулою:

$$P_n = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))...1 = n!$$

За визначенням $P_0 = 0! = 1$.

Задача 4. До каси для одержання грошей підійшли одночасно 4 людини. Скількома способами вони можуть створити чергу?

Розв'язок. Черга складається з 4 осіб, тому в кожному способі створення такої черги враховується порядок розташування людей. Таким чином, маємо перестановки з чотирьох осіб, їх число дорівнює

$$P_4 = 1*2*3*4 = 24.$$

Задача 5. Визначити можливу кількість варіантів списку групи з 15 осіб.

Розв'язок. $P_{15} = 15!$

Задача 6. Під час канікул студент вирішив відвідати 3 міста. Скільки є можливих маршрутів цими містами?

Розв'язок. $P_3 = 3!$

Визначення. Сполуками, що містять ***k*** елементів, обраних з ***n*** елементів даної множини, називаються підмножини ***k*** елементів, відмінні хоча б одним елементом. Кількість сполук з ***n*** елементів по ***k*** елементах позначають: C_n^k або $\binom{n}{k}$.

Теорема. Кількість сполук з ***n*** елементів по ***k*** елементах визначається формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!*(n-k)!}.$$

Доведення. Розглянемо перестановку з ***n*** елементів по ***k*** елементах. Їх кількість

$$A_n = n(n-1)(n-2)...(n-(k-1)).$$

Якщо не враховувати порядку елементів у перестановці з ***k*** елементів, то існує ***k!*** перестановок, які є нерозрізненими, тобто, їх не можна відрізнити від первісної перестановки. Тому кількість всіх сполук ***n*** елементів по ***k*** в ***k!*** разів менша від кількості всіх перестановок, тобто

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!}.$$

Цю формулу можна спростити, якщо домножити члени дробу, що стоїть у правій частині рівності, на $(n-k)!$:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Задача 7. З групи 15 юнаків треба взяти трьох для розвантаження машини. Визначити кількість можливих варіантів відбору.

Розв'язок. Нам необхідно визначити кількість таких трійок, відмінних тільки складом, тобто хоча б однією особою. Отож розв’язок буде таким:

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3!*12!}.$$

Задача 8. У ящику 20 куль, серед яких 12 білих, інші — чорні. Відбирають навмання 2 кулі.

Скількома способами можна відібрати:

а) дві білі кулі;

б) дві чорні кулі;

в) одну білу, одну чорну кулі?

Розв'язок. Кількість способів, якими можна відібрати дві білі кулі з 12-ти, не залежить від порядку відбору й дорівнює кількості множин із 12 по 2, що відрізняються тільки складом.

Отже,

$$C_{12}^{2} = \frac{12!}{2!*10!} = \frac{11*12}{1*2} = 66.$$

Кількість способів, якими можна відібрати 2 чорні кулі з 8, дорівнює:

$$C_{8}^{2} = \frac{8!}{2!*6!} = \frac{7*8}{1*2} = 28 .$$

Кількість способів, якими можна відібрати одну білу, одну чорну кулі, згідно з основним принципом комбінаторики, дорівнює 12*8=96:

$$C_{12}^{1} * C_{8}^{1} = \frac{12!}{1!*11!} * \frac{8!}{1!*7!} = 12*8 = 96$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Турист хоче за кілька років відвідати музей Далі у Фігерасі, музей Пікассо в Парижі, музей Ван Гога в Амстердамі, музей Гогена на острові Таїті та Королівську Академію Мистецтва в Лондоні. Він може відвідувати тільки два міста за рік: одне взимку, друге – влітку. Яку кількість варіантів відвідання виставок він може скласти на майбутній рік?

2. Скільки існує різних автомобільних номерів, які складаються з п’яти цифр, що не повторюються?

3. Музей Пікассо в Парижі зачинено на ремонт. Ядро колекції музею (195 експонатів) вирушає у світове турне по містах: Мадрид, Абу-Дабі, Токіо, Торонто, Гельсінкі, Санкт-Петербург, Сієтл, Нью-Йорк, Сан-Франциско. Скільки існує варіантів такого турне?

7. ПОДІЇ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

Випробування — це здійснення певного комплексу умов, за яких проводять спостереження. Так, під час стрільби по мішені випробування полягає в підготовці до стрільби, зарядці зброї, прицілюванні, натиску на спусковий курок.

Стохастичний експеримент — це експеримент, результат якого не можна передбачити.

Приклад 1. Підкидаємо монету.

Приклад 2. Підкидаємо дві гральні кості.

Приклад 3. Підкидаємо монету до першої появи герба.

Приклад 4. Спостерігаємо траєкторію частки при броунівському русі.

Припустимо, що випробування можна провести скільки завгодно разів. У теорії ймовірностей під подією розуміють якісний результат одного чи кількох випробувань, якщо вони повторюються багаторазово. Наприклад, під час підкидання монети двічі, можливі такі події:

а) обидва рази випав герб;

б) обидва рази випала решка.

Зрозуміло, що в цьому прикладі можливі й інші результати.

Визначення. Певна множина, елементи якої дають вичерпаний опис усіх можливих наслідків даного експерименту, називається простором елементарних наслідків і позначається Ω.

Для прикладу 1: $\Omega=\{Г, Р\}$.

Для прикладу 2: $\Omega= \{(1,1)(1,2), \ldots , (6,6)\}$.

Для прикладу 3: $\Omega= \{Г, РГ, РРГ, \ldots , Р\ldots РГ\}$.

Для прикладу 4: $\Omega=\{$множина неперервних функцій$\}$.

Події позначають великими літерами латинського алфавіту: **A, B, C, ...** . Надалі опис події стоятиме поряд із його визначенням та з'єднуватиметься з ним знаком «=». Наприклад, подія **A**={під час підкидання монети випав герб}; подія **B**={вийнята з ящика куля біла}; подія C={два влучення по мішені під час трьох пострілів}.

Події прийнято класифікувати. Є безліч типів класифікації. Наведемо лише деякі. Наприклад, розрізняють достовірні, неможливі та випадкові події.

Визначення. Достовірною називають подію **A,** яка під час випробування не може не статися, а за повторення випробувань щоразу відбувається.

Приклад 5. У ящику містяться тільки білі кулі. Подія **A** ={поява білої кулі під час витягування однієї кулі} є достовірною.

Визначення. Подію **B** називають неможливою, якщо під час випробування вона не може статися.

Приклад 6. У ящику містяться тільки білі кулі. Подія **B** ={поява чорної кулі під час витягування однієї кулі} не можлива.

Визначення. Випадковою називають подію, яка під час випробування може або статися, або не статися.

Приклад 7. Під час підкидання монети можуть статися: подія **A** ={випав герб} або подія **B** ={випала решка}. Тут **A** і **B** — випадкові події.

Ще один тип класифікації: розрізняють сумісні та несумісні події.

Визначення. Події **A** та **B** називають несумісними, якщо під час одного випробування поява однієї з них виключає появу другої.

Приклад 8. Під час одного пострілу по мішені події **A** ={влучення} та **B**={промах} несумісні.

Визначення. Події **А** та **В** називають сумісними, якщо під час випробування поява однієї з них не виключає появи другої.

Приклад 9. З партії посівного матеріалу відбирають дві зернини. Нехай подія **А**={перше зерно зійде}, подія **В** ={друге зерно не зійде}. **А** та **В** — сумісні події.

Визначення. Події **А, В, С,…** утворюють в одному випробуванні повну групу, якщо вони є попарно несумісними, а в результаті випробування неодмінно відбувається одна з них.

Приклад 10. Під час садіння молодих дерев можливі такі події:

А={дерево прийнялося}; **В**={дерево не прийнялося}. Події **А** та **В** утворюють повну групу.

Визначення. Дві несумісні події, що утворюють повну групу, називаються протилежними.

Наприклад, влучання і промах за одного пострілу — події протилежні. Випадання герба й випадання решки під час одного підкидання монети — події протилежні.

Нехай випробування, внаслідок якого може з'явитися подія А, повторюється **n** разів. Подія, яка полягає в появі події А хоча б один раз, означає, що вона з'являється не менше ніж раз і не більше ніж **n** разів. Поява хоча б однієї події й непоява жодної — події протилежні.

Події **А, В, С** тощо називають рівноможливими, якщо немає підстав вважати, що в даному випробуванні одна з них більш можлива, ніж інші. Під час підкидання монети подія **А**={випадання герба} і подія В={випадання решки} — рівноможливі. Під час підкидання грального кубика випадання граней з 1, 2, 3, 4, 5 та 6 очками — події рівноможливі.

Для подій можна визначити всі опції, що визначаються для множин [3].

Таблиця 1

Визначення	**Теорія множин**	**Теорія ймовірностей**
Ω	Універсальна множина	-Простір елементарних результатів, -достовірна подія
$\varnothing$	Порожня множина	Неможлива подія
$A \subset B$	$x \in A \Rightarrow x \in B$	Подія A тягне подію B
$A \bigcup B$	Об'єднання множин	Сума подій – подія, яка відбувається тоді й тільки тоді, коли відбувається A або B
$A \bigcap B$	Перетин множин	Добуток подій – подія, яка відбувається тоді й тільки тоді, коли відбувається A і B
$A \bigcap B = \varnothing$	Множини не перетинаються	Несумісні події
$\overline{A}$	Доповнення множин	Протилежна подія
$A \setminus B$	Різниця множин	Різниця подій – подія, коли відбувається A, але не відбувається B

Задачі для самостійного розв'язання

1. У чому різниця між простором елементарних наслідків і повною групою?

8. ВІДНОСНА ЧАСТОТА ПОДІЇ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Нехай проводиться **N** іспитів, у кожному з яких може з'явитися або не з'явитися подія **A**. Після завершення іспитів виявилося, що подія **A** сталася **M** разів.

Визначення. Відносною частотою (частістю) події називається число

$$P^*(A) = \frac{M}{N},$$

де **M** — кількість появ події **A**;

N — загальна кількість проведених випробувань.

Якщо збільшувати **N**, то для деяких подій $P^*(A)$ мало відхилятиметься від деякого числа. Чим більше **N,** тим це відхилення менше. Якщо для події **A** частота $P^*(A)$ зі зростанням **N** мало відхиляється від деякого числа **p,** то **A** — статистично стійка подія. Причому **p** — ймовірність події **A.**

Приклад 11. Стрілець зробив 100 пострілів по мішені і влучив 90 разів.

Нехай подія **A** = {влучення по мішені за одного пострілу}. Тоді

$$P^*(A) = \frac{90}{100} = 0{,}9.$$

Властивості відносної частоти подій

1.Частість події — величина невимірна і змінюється на множині

$$[O,\ 1]=\{\ P^*(A)\ :\ 0 \le P^*(A) \le 1\}.$$

2. Частота достовірної події дорівнює 1.

3. Частота неможливої події дорівнює 0.

4. Частота випадкової події змінюється на множині (0, 1).

Властивості 1-4 легко довести за допомогою означення частоти. Так, наприклад, нехай подія **A** достовірна. Це означає, що в серії з **N** випробувань вона сталася **N** разів.

$$P^*(A) = \frac{N}{N} = 1.$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. З чорних і білих куль витяли 3 кулі. Чи протилежні події:

а) A={ хоча би 2 кулі білі}

B={ не менше ніж 1 куля чорна}

б) A={ не більше ніж 1 куля біла}

B={ 2 кулі чорні}

в) A={ хоча б 1 куля біла}

B={ 3 кулі чорні}

2. При 3 пострілах по мішені чи протилежні події:

а) A={ хоча би 2 влучення}

B={ не менше ніж 1 промах}

б) A={ не більше ніж 1 влучення}

B={ 2 промахи}

в) A={ хоча б 1 влучення}

B={ 3 промахи}

9. ЙМОВІРНІСТЬ ПОДІЇ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Відносна частота залежить від випадкових обставин, які супроводжують випробування. Назвемо багаторазове повторення випробувань серією випробувань. Під час переходу від однієї серії випробувань до іншої часто буває, що для тієї самої події відносна частота $\mathbf{P^*(A)}$ виявляє стійкість, тобто, зі зростанням кількості випробувань у $\mathbf{N}$ серіях коливання значень відносної частоти зменшуються. Можна припустити, що існує постійне число, від якого частоти в різних серіях відхиляються в той чи інший бік[1].

Це число, як кількісну міру об'єктивної можливості здійснення події за одного випробування, беруть за статистичну ймовірність.

З означення випливає, що частота події є приблизним значенням імовірності цієї події, яка застосовується в практичних задачах. Якщо подія має більшу ймовірність порівняно з іншими можливими в цьому випробуванні, то вона стається частіше за інші.

9.1. Класичне визначення ймовірності

Спостерігаючи або вивчаючи які-небудь дві чи кілька подій, можна переконатися, що деякі з них більш можливі за інші, тобто, кожна подія має ту чи ту міру можливості. Якщо кожній події, можливій під час випробування, ставити у відповідність деяке додатне число, то логічно приписувати більше число більш можливій події. Число, що виражає міру можливості події, називається ймовірністю цієї події.

Задача 1. У ящику 25 куль, з них 10 білих, 7 блакитних, 4 жовті, 4 сині. Кулі змішують і навмання, не дивлячись, беруть 1 кулю. При цьому можливі такі події:

A = {куля біла};

B = {куля блакитна};

C = {куля жовта};

D = {куля синя}.

Дістати з ящика білу кулю можна швидше, ніж блакитну, а блакитну швидше, ніж жовту чи синю. Можливості дістати жовту чи синю кулю однакові. Числа 10/25, 7/25, 4/25, 4/25 визначають міру можливості появи відповідних подій і називаються їх імовірностями.

Задача 2. Нехай є корзина з 25 бульбами картоплі, причому з них 5 мають механічні ушкодження, завдані під час збирання. Бульби перемішують і беруть одну з них. Можливі такі події: А = {бульба без пошкоджень}; В = {бульба пошкоджена}.

Зрозуміло, що можливість витягти цілу бульбу більша, ніж пошкоджену, бо цілих бульб більше. Числа 20/25 і 5/25 показують міру об′єктивної можливості події **А** та події **В,** а також називаються їх імовірностями.

Нехай унаслідок випробування може настати скінченне число **n** елементарних подій. Серед цих **n** подій є **m** тих, здійснення яких веде до появи події **А**. Ці **m** подій називають сприятливими для **А**[2].

Визначення. Ймовірністю події **А** називається відношення числа **m** рівноможливих елементарних подій, сприятливих для **А**, до числа **n** всіх можливих елементарних подій.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Ймовірність події **А** позначають **Р(А).**

Задача 3. Кинуто гральний кубик. Знайти ймовірність події **А=**{випало парне число очок}.

Розв'язок. Елементарними подіями, сприятливими для **A,** є події: **A=**{випадання 2 очок}, **A=**{випадання 4 очок}, **A=**{випадання 6 очок}. Всього таких подій 3. Маємо шість елементарних подій, n=6, отже,

P(A)=3/6=1/2.

Задача 4. Знайти ймовірність події **A=**{виграш найбільшої суми під час гри в лото за одним квитком}, якщо для цього необхідно вгадати 5 з 36 чисел.

Розв'язок. За наявності одного квитка є одна сприятлива для **A** елементарна подія = {всі п'ять чисел вгадано правильно}, тобто **m=**1. Число **n** усіх елементарних подій дорівнює числу можливих груп із 5 чисел, відмінним хоча б одним числом, тобто **n** $= C_{36}^{5}$.

$$P(A) = \frac{1}{C_{36}^{5}} = \frac{1}{376922} \approx 0.000003.$$

Властивості ймовірності події:

1. Оскільки 0≤**m** ≤**n** **,** тоді 0≤**P(A)** ≤1, яка б не була за своєю природою подія **A.**

2. Якщо **A** — подія неможлива, тоді **P(A)=**0.

3. Якщо **B** — подія достовірна, тоді **P(B)=**1.

Задача 5. Талони занумеровані всіма двозначними числами. З пачки талонів навмання беруть 1 талон. Яка ймовірність події **A,** якщо номер талона складається з однакових цифр?

Розв'язок. Підрахуємо кількість всіх талонів (загальну кількість усіх можливих елементарних подій). Номери з 11 по 19 будуть на 10 талонах, і так у кожній наступній десятці. Тобто, кількість двозначних чисел **n=**90. Талони з однаковими цифрами 11, 22, 33, ... містяться в кожних з 10 талонів по одному, тобто **m=**9. Тоді

$$P(A) = \frac{9}{90} = 0.1,$$

імовірність мала, отже, під час одноразового випробування подія, найімовірніше, не відбудеться.

Задача 6. У ящику 20 куль, з яких 12 білих, інші чорні. Витягують дві кулі. Знайти ймовірності подій:

A= {обидві кулі білі};

B={обидві кулі чорні};

C={одна куля біла, одна чорна}.

Чи утворюють події **A, B, C** повну групу? Перевірте рівність **P(A)+P(B)+P(C)=1.**

Розв'язок. У попередніх розділах було знайдено, скількома способами можна відібрати: а) дві білі; б) дві чорні; в) одну білу, одну чорну кулі. Також визначено й кількість елементарних подій, сприятливих для появи кожної з подій **A, B, C.** Підрахуємо кількість всіх елементарних подій, можливих під час випробування, або кількість способів, якими можна відібрати 2 кулі з 20. Зрозуміло, що це

$$C_{20}^{2}=\frac{20!}{2!\cdot 18!}=190.$$

Тоді, за означенням,

$$P(A)=\frac{C_{12}^{2}}{C_{20}^{2}}=\frac{66}{190}=\frac{33}{95};$$

$$P(B)=\frac{C_{8}^{2}}{C_{20}^{2}}=\frac{28}{190}=\frac{14}{95};$$

$$P(C)=\frac{C_{12}^{1}\cdot C_{8}^{1}}{190}=\frac{48}{95}.$$

У цьому випробуванні події **A, B** і **C** попарно несумісні. Вони утворюють повну групу, бо в підсумку обов'язково стається одна з цих подій. Тому

$$P(A)+P(B)+P(C)=\frac{33}{95}+\frac{14}{95}+\frac{48}{95}=1.$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Кодовий замок містить 5 цифр. Перша й остання однакові. Знайти ймовірність того, що з першого разу можна відкрити замок.

2. Кинуто дві гральні кості. Знайти ймовірність того, що сума очок дорівнюватиме 8, а різниця – відповідно 4.

3. Монету підкидають тричі. Знайти ймовірність того, що хоча би двічі випаде решка.

9.2. Геометричне визначення ймовірності

Якщо подія **A** — потрапляння в область **g** точки, кинутої в область **G**, тоді її ймовірність визначається за формулою

$$P(A) = \frac{\text{mes} \quad g}{\text{mes} \quad G},$$

де **mes g** — міра області **g** (довжина, площа, об'єм). Аналогічно **mes G.** Для одновимірної, двовимірної і тривимірної областей ця формула відповідно матиме вигляд:

$$P(A) = \frac{L_g}{L_G}; \quad P(A) = \frac{S_g}{S_G}; \quad P(A) = \frac{V_g}{V_G},$$

де L — довжина; S — площа; V — об'єм відповідної області.

Задача 1. На відрізку **OA** довжини **L** числової осі Ox навмання нанесено точку **B(x)**. Знайти ймовірність того, що відрізки **0B** і **BA** мають довжину більшу за **L/4** (подія A)**.** Знайти ймовірність того, що відрізки **0B** і **BA** мають довжину більшу за **L/4,** та |**OB**| більша за |**BA**| (подія B).

Розв'язок. Розглянемо рисунок 1:

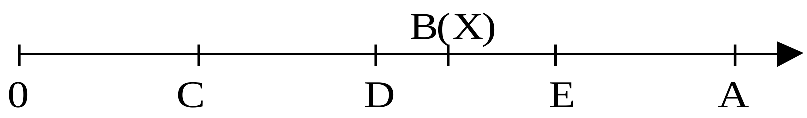

Рис. 1. Точка на відрізку

|

Розбиваємо відрізок **OA** на рівні частини точками C, D, E.

OA|=**L**; |CE|=**L**/2.

Подія **A=**{|OB| і |BA| > **L**/4}; **P(A)** = 1/2;

Подія **B=**{|OB| і |BA| > **L**/4 і |OB| > |BA|}; **P(A)=**1/4.

Задача 2. У середині еліпса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ розташоване коло $x^2+y^2=9$. Знайти ймовірність потрапляння точки в кільце, обмежене еліпсом і колом.

Розв'язок. Нехай подія **A=**{т. A потрапила в кільце}.

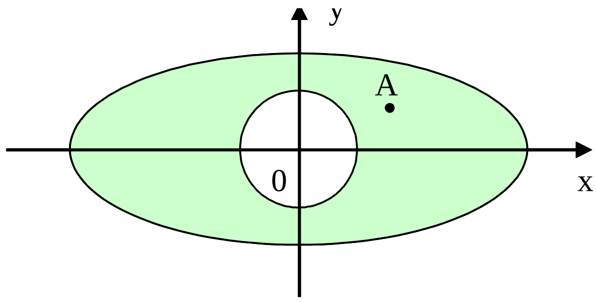

Рис. 2. Кільце, обмежене еліпсом і колом

$$P(A)=\frac{S_{кільця}}{S_{еліпса}}=\frac{S_{еліпса}-S_{кола}}{S_{еліпса}}=\frac{\pi ab-\pi r^2}{\pi ab}=$$

$$=\Big|\ a=5;\quad b=4;\quad r=3;\ \Big|=\frac{20\pi-9\pi}{20\pi}=\frac{11}{20}=0.55.$$

Примітка. Імовірність потрапляння кинутої точки в одну певну точку області G дорівнює нулю, проте ця подія може статися й, отже, не є неможливою.

Задача 3. (Задача про зустріч). Два студенти **A** і **B** домовилися зустрітися в певному місці під час перерви між 13 год і 13 год 50 хв. Той, хто прийшов перший, чекає іншого протягом 10 хв, після чого йде геть. Чому дорівнює ймовірність їхньої зустрічі, якщо прихід кожного з них протягом зазначених 50 хв може статися навмання й моменти приходу незалежні[5].

Розв'язок. Розглянемо рисунок.

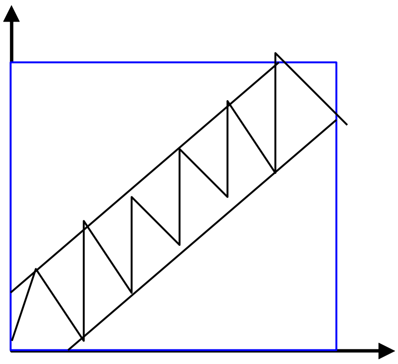

Рис.3. Поле зустрічі студентів

Позначимо момент приходу студента **А** через **х**, а студента **В –** через **у**. Для того щоб зустріч відбулася, необхідно й достатньо, аби |х-у|<10. Одиниця масштабу — 1 хв. Всі наслідки – квадрат 50х50. Наслідки, сприятливі шуканій події,— заштрихована фігура.

$$P(\{зустріч\}) = \frac{S_{з.ф}}{S_{квад}} = \frac{50^2 - 40^2}{50^2} = 0.36.$$

9.3. Аксіоматичне визначення ймовірності

Нехай:

Ω — простір елементарних наслідків;

ω— елементарна подія;

∅— неможлива подія;

Ω— достовірна подія.

Випадкова подія — будь-яка підмножина Ω, окрім ∅ і Ω.

Визначення. Якщо під час кожного здійснення комплексу умов, за яких відбувається подія **А,** відбувається й подія **В,** тоді кажуть, що **А** тягне за собою **В,** або **А** є окремим випадком **В** і позначається **А**$\subset$ **В**.

Якщо **А**$\subset$ **В** і **В**$\subset$ **А**, тоді кажуть, що **А** і **В** рівносильні.

Нехай Ω — простір елементарних подій, **L** — деяка система випадкових подій[6].

Визначення. Система L випадкових подій називається алгеброю подій, якщо виконані умови:

1) $\Omega \in$ **L**;

2) якщо **A** $\in$ **L**, **B** $\in$ **L**, тоді $A \cdot B \in$ **L**, **(A+B)** $\in$ **L**, **(A-B)** $\in$ **L.** Із цих умов маємо, що $\varnothing \in$ **L**.

Визначення. Алгебра подій **L** називається **σ**-алгеброю, або борелівською алгеброю, якщо з того, що $A_n \in$ **L**, n = 1,2, ... маємо:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in L; \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in L.$$

Визначення (Аксіоматичне означення ймовірності). Числова функція **P(A),** визначена на алгебрі подій **L**, називається ймовірністю, якщо виконані такі аксіоми:

1. Кожній події **A** $\in$ **L** відповідає невід'ємне число **P(A)** — його ймовірність, тобто **P(A)**≥0 для будь-якого **A** $\in$ **L**.

2. Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці. **P(Ω)=1.**

3. Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій, тобто **P(A+B) = P(A) + P(B),** якщо $AB = \varnothing$.

4. Для будь-якої спадної послідовності $A_1 \supset A_2 \supset \ldots A_n \supset \ldots$ подій з **L** такої, що $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, справедлива рівність $\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0.$

Деякі наслідки з аксіом імовірності

1. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює 1:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

2. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю:

$$P(\varnothing)=0$$

3. Для будь-яких подій **A** і **B** дійсні співвідношення:

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,

$P(A+B) \le P(A)+P(B)$.

4. Якщо події A_1, A_2,…, A_n попарно несумісні (тобто $A_i\ A_j = \varnothing$ для будь-яких $i \neq j$, $i,j=1, 2, \dots , n$), тоді

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

5. Для будь-яких подій $\mathbf{A_1}$ **,** $\mathbf{A_2}$ **,…,** $\mathbf{A_n}$ виконується нерівність

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \le P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

6. Якщо подія **A** спричинює подію **B** ($\mathbf{A \subset B}$), тоді $\mathbf{P(A) \le P(B)}$.

7. Імовірність будь-якої події виражається невід'ємним числом, не більшим за одиницю: $\mathbf{0 \le P(A) \le 1}$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Визначити ймовірність того, що дві точки опиняться всередині вписаного в коло правильного трикутника, якщо ці точки навмання кинуто всередину кола, радіусом R (R=3).

2. У коло вписаний квадрат. Визначити ймовірність того, що дві точки не опиняться всередині вписаного в коло квадрата, якщо ці точки навмання кинуто всередину кола, радіусом R (R=4).

3. Визначити ймовірність того, що чотири точки опиняться всередині вписаного в коло правильного трикутника, якщо ці точки навмання кинуто всередину кола, радіусом R (R=3).

4. У квадрат вписане коло. Визначити ймовірність того, що дві точки не опиняться всередині кола, вписаного в квадрат, якщо ці точки навмання кинуто всередину квадрата, радіусом R (R=4).

5. На відрізку OA довжини L числової осі Ox навмання нанесено точку B(x). Знайти ймовірність того, що відрізки 0B і BA мають довжину більшу за L/3 (подія A).

10. ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ ТА ДОБУТКУ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Визначення. Сумою чи об'єднанням двох подій **A** і **B** будемо називати подію **C,** що полягає в появі хоча б однієї з них.

Пишуть **C** = **A** + **B,** або **C** = **A**$\cup$ **B,** або **C** = (**A** чи **B**).

Приклад. Нехай **A** — подія, яка полягає в тому, що навмання обрана з череди корова має удій від 3000 до 3500 кг на рік; **B** — подія, яка полягає в тому, що обрана корова мала удій понад 3500 кг. Тоді подія **C** = **A** + **B** означає, що обрана корова має удій понад 3000 кг.

Теорема додавання ймовірностей

Теорема. Ймовірність настання однієї з двох ***несумісних*** подій дорівнює сумі їх імовірностей, тобто

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Доведення. Нехай **n** — число всіх можливих елементарних подій, за яких може статися подія **A** чи подія **B.** Нехай $\mathbf{m_A}$ **—** число однаково можливих елементарних подій, сприятливих для **A,** $\mathbf{m_B}$ — таке саме число для події **B.** Маємо**:**

$$P(A)=\frac{m_A}{n}; \qquad P(B)=\frac{m_B}{n}.$$

Зрозуміло, $\mathbf{m_A}$ + $\mathbf{m_B}$ — число елементарних подій, сприятливих для появи події або **A,** або **B,** отож:

$$\mathrm{P(A \quad або \quad B) = P(B+A) = \frac{m_A+m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A)+P(B).}$$

Теорему доведено.

Теорема додавання для більшої кількості попарно несумісних подій формулюється та доводиться аналогічно[6]:

$$P(A \text{ або } B \text{ або } C) = P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C).$$

Наслідок 1. Якщо події **A, B, C** утворюють повну групу, тоді сума їх імовірностей дорівнює 1.

Справді, внаслідок випробування обов'язково відбудеться одна з цих подій (або **B,** або **A,** або **C**). Тому **A**+**B**+**C** — подія достовірна й **P**(**A**+**B**+**C**)=1.

З попередніх двох рівнянь маємо, що **P(A)**+**P(B)**+**P(C)**=1.

Наслідок 2. Сума ймовірностей двох протилежних подій **A** і $\bar{\mathbf{A}}$ дорівнює 1.

Протилежні події є окремим випадком подій, що утворюють повну групу, тому

$$P(A)+P(\bar{A})=1;$$

$$P(\bar{A})=1-P(A);$$

Зокрема, якщо ймовірність влучання в мішень під час одного пострілу дорівнює 0.8, тоді ймовірність промаху дорівнює 1 - 0.8 = 0.2.

Задача 1. У ящику 4 білі, 5 червоних, 8 зелених та 3 блакитні кулі. Кулі перемішують і витягують 1 кулю. Яка ймовірність події, що куля виявиться кольоровою (не білою)?

Розв'язок. Елементарними наслідками є події:

A = {витягли білу кулю};

B = {витягли червону кулю};

C = {витягли зелену кулю};

D= {витягли блакитну кулю}.

Шукана подія полягає в появі події {**B**, або **C**, або **D**}, тобто події **B**+**C**+**D**.

Оскільки події **B**, **C**, **D** несумісні, тоді

$$P(B+C+D)=P(B)+P(C)+P(D)=5/20+8/20+3/20=4/5.$$

Теорема добутку імовірностей

Визначення. Добутком чи перетином подій **A** і **B** називають подію **C**, що полягає в сумісному наставанні цих подій, тобто в наставанні й події **A**, і події **B**. Добуток подій позначають **AB**=**C**, або A $\cap$ B=C, та (A і B)=C. Добуток кількох подій визначається аналогічно[7].

Задача 2. Нехай **A**={пасажир вирушив з дому на автобусі й доїхав до вокзалу}; **B**={пасажир придбав залізничний квиток}; **C**={пасажир дістався до свого місця у вагоні}; **D**={вагон із пасажиром рушив у путь}. Тоді **ABCD**=**E**={пасажир поїхав}.

Тепер можна дати означення поняттю умовної ймовірності.

Визначення. Ймовірність події **B** за умови, що подія **A** відбулася, називається умовною ймовірністю події **B** й позначається **P(B/A)**, або $\mathbf{P_A(B)}$. Аналогічно визначається умовна ймовірність події **A** і позначається **P(A/B)**.

Задача 3. У череді тварин з 24 голів однієї породи 4 тваринам не зроблено щеплення. Навмання, послідовно, без повернення в череду відбирають дві тварини. Імовірність події **A**={першій відібраній тварині не зроблено щеплення}, тобто **P(A)** дорівнює 4/24 =1/6. Імовірність події **B**={другій тварині не зроблено щеплення}, за умови, що відбулася подія **A**, **P(B/A)** = 3/23. Якщо ж першу відібрану тварину повернути до череди, тоді **P(B)**=4/24=1/6. У першому разі ймовірність події залежить від того, чи настала подія **A**, а в другому разі – не залежить.

Визначення. Події **A** і **B** називаються незалежними, якщо

$$\mathbf{P(B/A) = P(B)} \text{ і } \mathbf{P(A/B) = P(A)}.$$

Якщо **P(B/A) ≠ B** або **P(A/B) ≠ P(A)**, тоді події **A** і **B** залежні.

Теорема. Ймовірність ***добутку*** двох подій, тобто ймовірність сумісного настання подій **A** і **B** дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої.

Доведення. Нехай для події **A** сприятливими є $\mathbf{m_A}$ рівноможливих елементарних подій із загального числа **n** елементарних подій, причому $\mathbf{m_{AB}}$ з цих $\mathbf{m_A}$ подій сприятливі для події **B**. Тоді за означенням маємо:

$$P(A/B)=\frac{m_{AB}}{m_A}=\frac{\frac{m_{AB}}{n}}{\frac{m_A}{n}}=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Тоді маємо, що **P(AB)** = **P(A** і **B)** = **P(A) (B/A)**. Теорему доведено.

Справедливість рівності **P(AB)** = **P(A) P(B/A)** випливає з доведення теореми.

Якщо події **A** і **B** незалежні, тоді **P(AB)** = **P(A)P(B)**, тобто ймовірність одночасного наставання незалежних подій дорівнює добутку їх імовірностей.

Для обчислення ймовірності одночасного настання більшої кількості подій, наприклад трьох, використовують формулу

$$\mathbf{P(A_1\,A_2A_3)= P(A_1)\,P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1A_2),}$$

де $\mathbf{P(A_3/A_1A_2)}$ **–** імовірність події $\mathbf{A_3}$, обчислена за умови, що події $\mathbf{A_1}$ і $\mathbf{A_2}$ вже відбулися.

Задача 4. У ящику 60 груш сорту **A** і 40 груш сорту **B**. Відбирають 2 груші. Визначити ймовірності таких подій:

а) обидві груші сорту A;

б) обидві груші сорту B;

в) одна груша сорту A, а друга – сорту B.

Розв'язок. Позначимо:

подія $\mathbf{A_1}$ ={ перша груша сорту **A**};

подія $\mathbf{A_2}$ ={друга груша сорту **A**};

подія $\mathbf{B_1}$ ={перша груша сорту **B**};

подія $\mathbf{B_2}$={друга груша сорту **B**}.

Необхідно обчислити ймовірності таких подій:

а) ($\mathbf{A_1}$ і $\mathbf{A_2}$);

б) ($\mathbf{B_1}$ і $\mathbf{B_2}$);

в) ($\mathbf{A_1}$ і $\mathbf{B_2}$) або ($\mathbf{B_1}$ і $\mathbf{A_2}$).

Знаходимо:

а) $\mathbf{P(A_1}$ і $\mathbf{A_2)}$= $\mathbf{P(A_1)P(A_2 / A_1)}$ = 60/100· 59/99 = 0. 36;

б) $\mathbf{P(B_1}$ і $\mathbf{B_2)}$= $\mathbf{P(B_1)P(B_2 / B_1)}$ = 40/100· 39/99 = 0. 16;

в) $\mathbf{P(A_1\ B_2}$ або $\mathbf{B_1\ A_2)=P(A_1)P(B_2\ /\ A_1)+P(B_1)P(A_2\ /\ B_1)}$= 60/100·40/99+40/100·60/99 = 0.48.

Оскільки події $\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{B_1B_2}$, $\mathbf{A_1B_2 + A_2B_1}$ утворюють повну групу, тоді сума їх імовірностей дорівнює 1. Справді, 0.36+0.16+0.48=1.

Задача 5. Сходження насіння, призначеного для посіву, оцінюється ймовірністю 98%. Ймовірність потрапляння насіння у сприятливі для проростання умови дорівнює 96%. Який процент насіння зійде?

Розв'язок. Позначимо $\mathbf{A_1}$ ={насіннєвий матеріал здатний зійти}; $\mathbf{A_2}$={насіння потрапило у сприятливі умови}. Подія **C**={посіяне насіння зійде} полягає в сумісному настанні подій $\mathbf{A_1}$ і $\mathbf{A_2}$, які є незалежними.

$\mathbf{P(C) = P(A_1\ A_2) = P(A_1)P(A_2/\ A_1) = P(A_1)P(A_2)}$ = 0.98· 0.96=0.94.

Таким чином, зійде 94% всього насіння.

Теорема додавання імовірностей (якщо події сумісні)

Теорема. Ймовірність появи хоча б однієї з двох ***сумісних*** подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій мінус імовірність їх сумісної появи, тобто

$$\mathbf{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).}$$

Доведення. За означенням подія **A+B** полягає в настанні або події $\mathbf{A\ \bar{B}}$, або події $\mathbf{\bar{A}\ B}$, або події **A B**, отже,

$$A+B=A\ \bar{B} + \bar{A}\ B + A\ B.$$

Події, що стоять у правій частині рівності, є несумісними: поява однієї з них виключає появу інших. Тому

$$P(A+B)=P(A\ \bar{B})+P(\bar{A}B)+P(A\ B). \qquad (1)$$

Але

$A=AB+A\ \bar{B}$, $P(A)=P(AB)+P(A\ \bar{B})$;

$B=AB+\ \bar{A}\ B$, $P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$.

Отже,

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB);$$

$$P(\bar{A}B)=P(A)-P(AB);$$

Підставляючи ці значення в (1), будемо мати $\mathbf{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)}$.

Теорему доведено.

Теорема проілюстрована на рис. 4.

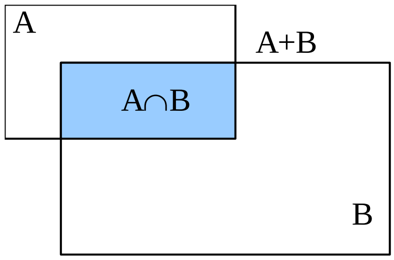

Рис 4. Перетин подій

Настанню події **A** або **B** відповідає фігура, яка складається з фігур, що відповідають події **A** та події **B**, без фігури суміщення **A** і **B**.

Задача 6. У засівах пшениці на ділянці 95% здорових рослин. Вибирають 2 рослини. Визначити ймовірність того, що серед них хоча б одна буде здоровою.

Розв'язок. Нехай подія $\mathbf{A_1}$={перша рослина здорова}; подія $\mathbf{A_2}$={друга рослина здорова}; подія $\mathbf{A_1+A_2}$ = {хоча б одна рослина здорова}. Оскільки події $\mathbf{A_1}$ та $\mathbf{A_2}$ сумісні, тоді $\mathbf{P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)}$ = 0.95+0.95-0.95-0.95=0.9975≈1.

Подія $\mathbf{A_1+A_2}$ практично достовірна.

Задачу можна розв'язати й іншим способом. Коли повторювати випробування, як це було в задачі, поява хоча б однієї події ($\mathbf{A_1+A_2}$) та непоява події жодного разу — події протилежні; тоді

$$P(A_1+A_2)=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)=1-0{,}0025=0.9975.$$

Як бачимо, отримали той самий результат.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Для зруйнування мосту достатньо, аби влучила одна авіаційна бомба. Знайти ймовірність того, що міст буде зруйновано, якщо скинути на нього чотири бомби, імовірності влучання яких дорівнюють 0.3, 0.4, 0.6, 0.7 відповідно.

2. Два стрільці стріляють по мішені. Ймовірність влучань 0.9 і 0.8 відповідно. Знайти ймовірність того, що жодний стрілець не влучить по мішені.

3. У читальному залі є 6 підручників, з яких 3 нових. Студенту потрібно взяти два. Знайти ймовірність того, що обидва підручники нові.

4. Два стрільці стріляють по мішені. Ймовірність влучань 0.9 і 0.8 відповідно. Знайти ймовірність того, що хоча б один стрілець не влучить по мішені.

5. Два стрільці стріляють по мішені. Ймовірність влучань 0.9 і 0.8 відповідно. Знайти ймовірність того, що хоча б один стрілець влучить по мішені.

6. Для зруйнування мосту достатньо, аби влучила одна авіаційна бомба. Знайти ймовірність того, що міст не буде зруйновано, якщо скинути на нього чотири бомби, імовірності влучання яких дорівнюють 0.3, 0.4, 0.6, 0.7 відповідно.

7. У читальному залі є 8 підручників, з яких 3 нових. Студенту потрібно взяти два. Знайти ймовірність того, що обидва підручники не нові.

8. У читальному залі є 15 підручників, з яких 5 нових. Студенту потрібно взяти три. Знайти ймовірність того, що хоча б один підручник новий.

11. ТЕОРЕМА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ

Наведена нижче формула об'єднує теореми додавання й добутку.

Теорема. Ймовірність події **A**, що може статися за умови здійснення однієї з несумісних подій $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, …, $\mathbf{B_n}$, які утворюють повну групу, визначається формулою:

$$P(A) = P(B_1)\,P(A / B_1) + P(B_2)\,P(A / B_2) + \ldots + P(B_n)\,P(A / B_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i).$$

Для настання події **A** необхідно й достатньо настання або події $\mathbf{AB_1}$, або події $\mathbf{AB_2}$, або події $\mathbf{AB_3}$,... , або події $\mathbf{AB_n}$. '

$$A=A\,B_1+A\,B_2+A\,B_3+\ldots+A\,B_n.$$

Оскільки події AB_i є несумісними, тому

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i).$$

Задача 1. Комп'ютери надходять на склад підприємства з пункту 1 та пункту 2, причому з першого пункту вдвічі частіше, ніж із другого. Ймовірність події {комп'ютер з першого пункту відповідає стандарту} дорівнює 0.9, а відповідна ймовірність для другого пункту дорівнює 0.7. Визначити ймовірність події A={взятий на складі підприємства комп'ютер відповідає стандарту}.

Розв'язок. Позначимо:

подія **A**= {комп'ютер стандартний};

подія $\mathbf{B_1}$= {комп'ютер надійшов з пункту 1};

подія $\mathbf{B_2}$={комп'ютер надійшов з пункту 2};

подія $\mathbf{A/B_1}$ = {стандартний комп'ютер з пункту 1};

подія $\mathbf{A/B_2}$ = {стандартний комп'ютер з пункту 2}.

Знаходимо

$\mathbf{P(B_1)}$=2/3;

$P(B_2)$=1/3;

$P(A/B_1)$ =0.9;

$P(A/B_2)$=0.7.

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)=9/10*2/3+7/10*1/3=5/6=0.8(3).$$

Подія **A** має велику ймовірність, вона практично достовірна, тобто настане в середньому у 83 випадках зі 100.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Комп'ютери надходять на склад підприємства з Америки та Японії, причому з Америки втричі частіше, ніж із Японії. Ймовірність події {комп'ютер з Америки відповідає стандарту} дорівнює 0.9, а відповідна ймовірність для Японії дорівнює 0.7. Визначити ймовірність події A={взятий на складі підприємства комп'ютер відповідає стандарту}.
2. У лікарні перебуває 50% пацієнтів із захворюванням K, 30% – із захворюванням L, 20% – із захворюванням M. Ймовірність вилікуватися від K=0.7, від L=0.8, від M=0.9. Знайти ймовірність, що людину виписали з лікарні здоровою.
3. У першій урні міститься 10 куль, з них 8 білих; у другій – 20 куль, з них 4 білі. З кожної урни навмання витягли по одній кулі, а потім з цих двох куль взяли одну. Знайти ймовірність того, що вона біла.
4. Кількість вантажівок, що їдуть по шосе, відноситься до кількості легкових машин, що рухаються тим самим шосе як 3:2. Ймовірність того, що вантажівку заправлятимуть, дорівнює 0, 1; відповідна ймовірність для легкової машини – 0, 2. Знайти ймовірність того, що машина, що рухається по шосе, заїде заправитись.

12. ФОРМУЛА БАЙЄСА

Розглянемо таку задачу. На фермах **A** і **B** стався спалах ящуру. Частки зараження худоби становлять відповідно 1/6 та 1/4. Навмання відібрана з однієї ферми тварина виявилася хворою. Знайти ймовірність події {тварину обрано з ферми **A**}. Позначимо:

A={відібрана тварина заражена};

B_1={тварину обрано з ферми A}; **$P(B_1)=0.5$;**

B_2={тварину обрано з ферми B}; **$P(B_2)=0.5$**;

A/B_1={тварина, відібрана з ферми **A,** заражена};

A/B_2= {тварина, відібрана з ферми **B**, заражена}.

Ймовірність події {тварину відібрано з ферми A, і вона заражена} можна записати як $P(A)P(B_1/A) = P(B_1)P(A/B_1)$, звідки

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)}$$

або

$$P(B_1/A) = \frac{0.5 \cdot 1/6}{0.5 \cdot 1/6 + 0.5 \cdot 1/4} = 2/5.$$

Замінивши **P(A)** на $\sum_{i=1}^{2} P(B_i)P(A/B_i)$, одержимо

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{\sum_{i=1}^{2} P(B_i)P(A/B_i)}.$$

Ця формула є окремим випадком формули Байєса.

Розглянемо задачу в загальному вигляді. Нехай внаслідок випробування відбулася подія **A**, яка могла статися тільки з кожною з подій **B_1, B_2, B_3, ... , B_n**, що утворюють повну групу; **$P(B_1)$, $P(B_2)$, ... , $P(B_n)$**

заздалегідь відомі. Треба знайти ймовірності подій B_1, B_2, ... , B_n після випробування, коли подія **A** вже сталася, тобто $P(B_i/A)$, i=1, 2, ... , n.

Міркуючи аналогічно, як під час розв'язання задачі, одержимо формулу:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A/B_k)}.$$

Ця формула називається формулою Байєса. За її допомогою можна обчислити ймовірності подій B_i, коли подія **A** відбулася, тобто переоцінити ймовірності. Причому, $P(B_i)$ називають апріорними ймовірностями, а $P(B_i/A)$ **–** апостеріорними ймовірностями.

Задача 2. Велику популяцію людей поділено на дві групи однакової кількості. Дієта однієї групи відмінна високим вмістом ненасичених жирів, а дієта контрольної групи була багатою на насичені жири. Після десяти років перебування на цих дієтах виникнення серцево-судинних захворювань становили в цих групах 31% і 48%. Випадково обрана з популяції людина має серцево-судинне захворювання. Яка ймовірність того, що ця людина належить до контрольної групи?

Розв'язок. Позначимо:

подія B_1={відібрана людина належала до першої групи};

подія B_2={відібрана людина належала до другої (контрольної) групи};

подія A/B_1={людина занедужала за умови, що вона належала до першої групи};

подія A/B_2 ={людина занедужала за умови, що вона належала до контрольної групи};

подія **A**={випадково відібрана людина захворіла}.

Тоді, використовуючи формулу Байєса, одержимо

$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)\,P(A/B_2)=1/2*0,\ 31+1/2*0,\ 48=0,\ 395.$

Ймовірність того, що хвора людина належить до контрольної групи, визначимо за формулою Байєса. Маємо:

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2)P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{0.5 \cdot 0.48}{0.395} = 0.61.$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. У лікарні перебуває 50% пацієнтів із захворюванням К, 30% – із захворюванням L, 20% – із захворюванням M. Ймовірність вилікуватися від К=0.7, від L=0.8, від M=0.9. Людину виписали з лікарні здоровою. Знайти ймовірність, що пацієнт вилікувався від хвороби L.
2. Кількість вантажівок, що їдуть по шосе, відноситься до кількості легкових машин, що рухаються тим самим шосе як 3:2. Ймовірність того, що вантажівку заправлятимуть, дорівнює 0, 1; відповідна ймовірність для легкової машини – 0, 2. На заправку заїхала машина. Знайти ймовірність того, що це вантажівка.
3. У першій урні міститься 10 куль, з них 8 білих; у другій – 20 куль, з них 4 білі. З кожної урни навмання витягли по одній кулі, а потім з цих двох куль взяли одну. Виявилось, що вона біла. Знайти ймовірність того, що куля була у першій урні.
4. Комп'ютери надходять на склад підприємства з Америки та Японії, причому з Америки втричі частіше, ніж із Японії. Ймовірність події {комп'ютер з Америки відповідає стандарту} дорівнює 0.9, а відповідна ймовірність для Японії дорівнює 0.7. Взятий на складі підприємства комп'ютер відповідає стандарту Визначити ймовірність того, що він з Японії.

13. СХЕМА БЕРНУЛЛІ

Задачі, що приводять до визначення частоти появи події в незалежних випробуваннях. Формула Бернуллі

Задача 1. Припустимо, що на дослідній ділянці посіяно 15 насінин. Вважатимемо, що сходження всього насіння однакове й дорівнює 80%. Можливі такі елементарні події:

$\mathbf{A_0}$={кількість насіння, що дало паросток, дорівнює 0};

$\mathbf{A_1}$= {кількість насіння, що дало паросток, дорівнює 1};

$\mathbf{A_2}$={кількість насіння, що дало паросток, дорівнює 2}тощо й, нарешті,

$\mathbf{A_{15}}$={все насіння зійде}.

Як знайти ймовірності цих подій, зокрема, обчислити ймовірність того, що з 15 посіяних насінин зійде рівно 12, байдуже, у якій послідовності?

Розглянемо серію з **n** незалежних випробувань, у кожному з яких деяка подія **A** має одну й ту саму ймовірність **P(A)=p,** яка не залежить від номера випробування. Така серія випробувань називається **схемою Бернуллі**.

Розв'яжемо ще одну задачу. В умовах схеми Бернуллі визначимо ймовірність $\mathbf{P_{k,n}}$ події, яка полягає в тому, що при **n** повтореннях випробування подія **A,** яка має ту саму ймовірність появи в кожному випробуванні, станеться рівно **k** разів, байдуже в якій послідовності.

Елементарними подіями будуть:

подія $\mathbf{A_i}$={поява події **A** в i-му випробуванні} (i=1, 2, 3, ... , n), $P(A_i)=p$;

подія $\overline{A_i}$ ={непоява події A в i-му випробуванні)} (i=1, 2, 3, ... , n), $P(\overline{A_i}) = 1 - p = q.$

Припустимо, що подія **A** сталася в **k** перших випробуваннях і не сталася в **n-k** наступних, тобто, відповідно до визначення добутку подій, сталася подія $A_1A_2A_3 \ldots A_k \overline{A_{k+1}} \ldots \overline{A_n}$. Оскільки події незалежні, то, застосовуючи теорему добутку ймовірностей, одержимо

$$P(A_1A_2A_3 \ldots A_k \overline{A_{k+1}} \ldots \overline{A_n}) = p^k q^{n-k}.$$

Поява події **A** рівно **k** разів і події $\overline{A}$ рівно **n-k** разів з такою самою ймовірністю можлива і в іншій послідовності, тобто іншим способом. Наприклад, подія A може статися в **k-1** перших випробуваннях, не статися у випробуваннях, номер яких від **k** до **n-1**, і знову статися в останньому **n**-му випробуванні. Кількість способів настання складної події, що полягає в появі події **A** саме **k** разів і непояві **n-k** разів, дорівнює кількості будь-яких множин, які можна утворити з **n** елементів по **k** елементах і які відрізняються тільки складом. Кількість таких множин дорівнює

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Таким чином, імовірність настання події **A** рівно **k** разів і події $\overline{A}$ рівно **n-k** разів дорівнює $p^k q^{n-k}$, і ця складна подія може статися одним з C_n^k способів. За теоремою додавання імовірностей

$$P_{k,n} = \underbrace{p^k q^{n-k} + p^k q^{n-k} + \ldots + p^k q^{n-k}}_{C_n^k \text{ разів}} = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Враховуючи визначення C_n^k, запишемо цю формулу як

$$P_{k,n} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Це формула Бернуллі. Тут **n** — кількість повторень незалежних випробувань; **k** — кількість випробувань, у яких подія **A** відбулася (кількість успіхів); **p** – ймовірність появи події **A** в одному випробуванні, **q** — ймовірність непояви події **A** у випробуванні (**q=1-p**); $P_{k,n}$ — ймовірність складної події, що під час **n** випробувань подія **A** відбулася рівно **k** разів.

Повернемося до задачі, сформульованій вище.

Кількість посіяних насінин дорівнює кількості незалежних випробувань, тобто **n**=15, кількість успіхів **k**=12, **p**=0.8, **q**=1-0.8=0.2 . Тоді

$$P_{12,15} = \frac{15!}{12! \cdot 13!} \cdot 0.8^{12} \cdot 0.2^{3} = 0.2551.$$

Подія “12 з 15” має невелику ймовірність. Якщо спостерігати такі серії повторень випробувань, тоді 12 успіхів із 15 випробувань стануться в середньому в 25 серіях зі 100.

Найімовірніше число появи події під час повторення випробувань

***Задача* 1.** Садівник зробив восени 6 щеплень. З досвіду минулих років відомо, що після зимування 7 живців із кожних 10-ти лишалися життєздатними. Яка кількість живців, що прижилися, є найбільш імовірною?

Розв'язок. Будемо умовно вважати, що ймовірність події, яка полягає в тому, що прищеплений живець приживеться, однакова для всіх живців і дорівнює 0.7, та що випробування є незалежними. Складемо таблицю, враховуючи, що p=0.7, q=0.3.

Таблиця 2

Живці, що прижилися	0	1	2	3	4	5	6
Ймовірності **$P_{k,n}$**	$C^0_6 0.7^0 0.3^6$ 0.0007	$C^1_6 0.7^1 0.3^5$ 0.0102	$C^2_6 0.7^2 0.3^4$ 0.0593	$C^3_6 0.7^3 0.3^3$ 0.1852	$C^4_6 0.7^4 0.3^2$ 0.324	$C^5_6 0.7^5 0.3^1$ 0.3025	$C^6_6 0.7^6 0.3^0$ 0.1176

З таблиці видно: найбільша ймовірність відповідає події, що приживуться 4 живці. Таким чином, ця подія є більш можливою, ніж усі інші.

Розв'яжемо задачу в загальному вигляді, не складаючи наведеної вище таблиці. Позначимо кількість появ події **A**, що має найбільшу ймовірність під час **n** випробувань, через $\mathbf{k_0}$. Тоді

$$P_{k_0,n} / P_{k_0+1,n}; \tag{1}$$

$$P_{k_0,n} / P_{k_0-1,n}. \tag{2}$$

З (1) маємо

$$\frac{P_{k_0+1,n}}{P_{k0,n}} \le 1$$

або враховуючи формулу Бернуллі

$$\frac{P_{k_0+1,n}}{P_{k_0,n}} = \frac{\dfrac{n!}{(k_0+1)!(n-k_0-1)!} p^{k_0+1} q^{n-k_0-1}}{\dfrac{n!}{k!(n-k_0)!} p^{k_0} q^{n-k_0}} = \frac{(n-k_0)p}{(k_0+1)q}.$$

З останньої нерівності маємо

$$(n-k_0)p \le (k_0+1)q.$$

Після перегрупування одержуємо

$$np-q \le k_0(p+q),$$

звідки маємо

$$np-q \le k_0. \tag{3}$$

Запишемо наслідок із нерівності (2):

$$\frac{P_{k_0-1,n}}{P_{k_0,n}} \le 1.$$

Виконуючи ті самі перетворення, що й для (1), маємо:

$$\frac{P_{k_0-1,n}}{P_{k_0,n}} = \frac{k_0}{n-k_0+1}\frac{q}{p} \le 1,$$

або

$$k_0(q+p) \le np + p,$$

звідки остаточно одержуємо

$$k_0 \le np + p. \tag{4}$$

Об'єднуючи (3) і (4), маємо:

$$np - q \le k_0 \le np + p. \tag{5}$$

Числа **np-q** і **np+p** відрізняються на одиницю. Тому, якщо **np-q** — дріб, то **np+p** — також дріб, і нерівність (5) визначає одне k_0. Якщо **np-q** — ціле число, то й **np+p** — ціле число; і тоді числа $\mathbf{k_0}$ і $\mathbf{k_0+1}$ матимуть однакову й найбільшу ймовірність.

У задачі про садівника обчислимо $\mathbf{k_0}$. Маємо **n**=6, **p**=0.7, **q**=0.3;

np-q=6*0.7*0.3=3.9;

np+p=6*0.7+0.7=4.9;

$3.9 \le k_0 \le 4.9;$

$\mathbf{k_0}$=4.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Визначити найімовірнішу кількість влучань по об'єкту, якщо батарея вистрілила по ньому 10 разів. Ймовірність влучання в об'єкт під час одного пострілу дорівнює 0,6.

14. ЛОКАЛЬНА ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА

Задача 1. На дослідній ділянці посіяно 1500 насінин. Знайти ймовірність події, яка полягає в тому, що зійдуть рівно 1200 насінин, якщо умовно вважати, що кожне зерно зійде з імовірністю 0.9.

Розв'язок. За формулою Бернуллі, враховуючи, що **n**=1500, **k**=1200, **p**=0.9, **q**=0.1, знаходимо

$$P_{1200,1500} = \frac{1500!}{1200! \cdot 1500!} \cdot 0.9^{1200} \cdot 0.1^{300}.$$

Одержання відповіді пов'язане зі значними обчислювальними труднощами. Зрозуміло, якщо багаторазово повторювати випробування, обчислення ймовірностей за формулою Бернуллі буде тяжким. Наближену формулу для окремого випадку p=1/2 уперше довів *Муавр* у 1730 р., а згодом *Лаплас* навів узагальнену формулу для 0<p<1.

ТЕОРЕМА. Якщо ймовірність настання події **A** в кожному з **n** незалежних випробувань постійна й дорівнює p (0<p<1), то справедлива така формула:

$$\lim_{n\to\infty}\left(P_{k,n} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{npq}}\, e^{\frac{-(k-np)^2}{2npq}} \right) = 0,$$

де $\mathbf{P_{k,n}}$ — ймовірність того, що під час **n** випробувань подія **A** з'явиться рівно **k** разів (**k** випробувань мають успіх); **q=1-p** – ймовірність непояви події **A** в одному випробуванні. На практиці застосовують наближену рівність — наслідок із формули, наведеної в теоремі:

$$P_{k,n} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

де $$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Зазначена наближена рівність дає тим точніший результат, чим більше число **n**. Для функції φ(x) складені таблиці. Оскільки φ(x) залежить від x у парному ступені, то $\varphi(x) = \varphi(-x)$ **.** Тому таблиці складені для значень $x \geq 0$

Задача2. Раніше було встановлено ймовірність того, що з 15 насінин проросте рівно 12, якщо p=0,8. $\mathbf{P_{12,15}}$=0.2551. Це точне значення. Знайдемо розв'язок цієї задачі з допомогою локальної теореми Муавра – Лапласа.

n=15,k=12, p=0.8, q=0.2, маємо npq=15*0.8*0.2=2.4;

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{12 - 15 \cdot 0.8}{\sqrt{15 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} = \frac{12 - 12}{\sqrt{2.4}} = 0;$$

$$\varphi(0) = 0.3989;$$

$$P_{12,15} \approx \frac{1}{\sqrt{2.4}} \cdot 0.3989 = 0.2581.$$

Як бачимо, навіть за невеликої кількості випробувань (**n**=15) похибка внаслідок заміни точної формули наближеною дорівнює 0.003.

Повернемося до вихідного завдання і знайдемо $\mathbf{P}_{1200,1500}$ за цією ж формулою.

Якщо n=1500, k=1200, p=0.9, q=0.1, маємо

$$x = \frac{1200 - 1500 \cdot 0.9}{\sqrt{1500 \cdot 0.9 \cdot 0.1}} = -\frac{150}{\sqrt{135}} = -12.91;$$

$$\varphi(-12.91) = \varphi(12.91) \approx 6.3 \cdot 10^{-4};$$

$$P_{1200{,}1500} \approx \frac{6.3 \cdot 10^{-4}}{\sqrt{135}} \approx 5.4 \cdot 10^{-5}.$$

Як бачимо, ймовірність мала. Подія, яка полягає в тому, що з посіяних 1500 насінин зійде рівно 1200, за однієї серії випробувань практично не станеться.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Визначити ймовірність того, що серед п'яти дітей родини три дівчинки.

15. ІНТЕГРАЛЬНА ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА

Теорема. Якщо ймовірність настання події **A** в кожному з **n** незалежних випробувань постійна й дорівнює p (0<p<1), то справедлива формула:

$$\lim_{n\to\infty}\left(P(k_1,k_2)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right)=0,$$

де **P(k₁,k₂)** — ймовірність того, що за **n** повторень випробувань подія **A** стається не менш ніж $\mathbf{k_1}$ і не більш ніж $\mathbf{k_2}$ разів.

Для розв'язання задачі застосовують наслідок із теореми:

$$P(k_1,k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}}dz,$$

де $$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}};\qquad x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Інтеграл $\int e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ не виражається через елементарні функції. Для обчислення ймовірностей застосовують добре вивчену функцію

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Для неї складені таблиці, а графік зображено на рис. 5.

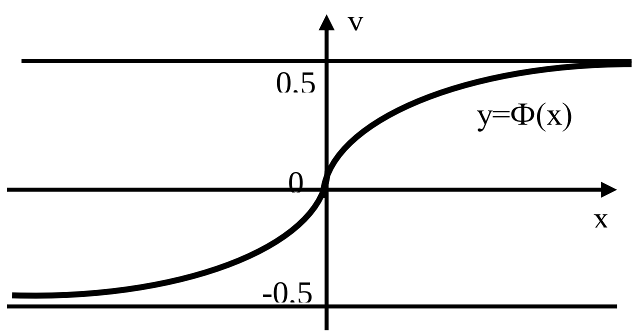

Рис.5. Функція Лапласа

Функцію **Φ(x)** називають функцією Лапласа.

Функція **Φ(x)** є непарною, тобто Φ(-x) = -Φ(x), таким чином, таблиці складені тільки для x>0. Застосовуючи функцію Лапласа та правила інтегрування, запишемо:

$$P(k_1,k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{x_1}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \int_{0}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right),$$

або остаточно так:

$$P(k_1,k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Задача 3. У лабораторії з партії насіння, що має сходження 90%, посіяно 600 насінин. Знайти імовірність події ={кількість насіння, яке зійшло, не менш ніж 520 і не більш ніж 570}, якщо вважати, що кожна посіяна зернина зійде з тією самою ймовірністю p=0.9.

Розв'язок. Маємо n=600, p=0.9, q=0.1, отже,

$$P(520{,}570) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де $x_1 = \frac{520 - 600 \cdot 0.9}{600 \cdot 0.9 \cdot 0.1} = -2.72; \quad x_2 = \frac{570 - 600 \cdot 0.9}{600 \cdot 0.9 \cdot 0.1} = 4.08;$

$P(k_1,k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$ = Φ(4,08) – Φ(-2,72) =

=Φ(4,08) + Φ(2,72)=0,4999+0,4967=0,9966.

Подія практично достовірна.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти ймовірність того, що герб випаде не менш ніж 48 разів і не більш ніж 52 рази, якщо монету кидають 100 разів.

16. РОЗПОДІЛ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Приклади випадкових величин:

1. кількість студентів на парі;
2. кількість яєць, отриманих від однієї курки за рік;
3. кількість дітей, народжених у даному пологовому будинку;
4. кількість студентів у певній аудиторії, народжених під сузір'ям Близнят;
5. кількість студентів, які одержали на іспиті «відмінно»;
6. відсоток жиру в молоці;
7. час, проведений у дорозі з дому в інститут;
8. кількість опадів, що випали в Києві за липень;
9. глибина засівання насіння під час сівби;
10. середній бал атестата зрілості.

Визначення. Випадковою називається величина, що внаслідок випробування може набути того чи того числового значення, причому заздалегідь невідомо, якого саме.

Випадкові величини поділяються на два типи: дискретні та неперервні.

Визначення. Випадкову величину називають дискретною, якщо всі можливі значення ізольовані одне від одного і їх можна занумерувати (приклади 1-5).

Визначення. Випадкову величину називають неперервною, якщо всі її можливі значення заповнюють деякий скінчений або нескінченний інтервал (приклади 6-10).

Задача 1. Припустимо, що череду тварин обробляють дезінфекційною речовиною проти захворювання А. Успіх процедури становить 90%. З череди після обробки відбирають 4 тварини. Обчислити ймовірності подій ={кількість здорових тварин серед відібраних дорівнює 0; дорівнює 1 тощо}

Розв'язок. Складемо таблицю, у першому рядку якої розмістимо можливі значення випадкової величини, у другому — відповідні їм імовірності (див. табл.3).

Таблиця 3

x	0	1	2	3	4
P	$P_{0,4}=C^0_4p^0q^4$ 0.0001	$P_{1,4}=C^1_4p^1q^3$ 0.0036	$P_{2,4}=C^2_4p^2q^2$ 0.0486	$P_{3,4}=C^3_4p^3q^1$ 0.2916	$P_{4,4}=C^4_4p^4q^0$ 0.6561

Через те, що всі події в цьому випробуванні утворюють повну групу,

$$\sum_{i=1}^{4} P_{i,4} = 1.$$

Справді, 0.0001 + 0.0036 + 0.0486 + 0.2916 + 0.6561 = 1.

Таблиця повністю характеризує випадкову величину X — кількість здорових тварин серед чотирьох відібраних.

Визначення. Законом розподілу випадкової величини називається відповідність, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та її ймовірностями.

Задача 2. Визначено, що в певній місцевості протягом низки років в червні налічується 30% дощових днів. Скласти закон розподілу випадкової величини X — кількості дощових днів протягом одного тижня червня.

Розв'язок. Можливі значення випадкової величини **X** такі: x_0=0, x_1==1, x_2=2, x_3=3, x_4=4, x_5=5, x_6=**6 .**

За аналогією до попередньої задачі складемо закон розподілу у вигляді табл. 4.

Таблиця 4

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P	0.0824	0.2472	0.3128	0.2263	0.0973	0.0250	0.0036	0.0002

Найбільшу ймовірність має подія, що на тижні буде два дощові дні.

Ряд розподілу

Найпростішою формою завдання закону розподілу дискретної випадкової величини X є ряд розподілу — таблиця, що складається з двох рядків: у верхньому перелічуються всі можливі значення випадкової величини (x_1, x_2, ... , x_n), у нижньому – ймовірності (p_1, p_2, ... , p_n), що їм відповідають.

Таблиця 5

X_i	X_1	X_2	…	X_n
P_i	P_1	P_2	…	P_n

Кожна ймовірність p_i (i=1, 2, ... , n) – це ймовірність події, що випадкова величина X набуватиме значення x_i:

p_1=P(X=x_1): p_2=P(X=x_2), ... , p_n=P (X=x_n), причому

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Багатокутник розподілу

Для наочності закон розподілу дискретної випадкової величини можна зобразити графічно, для чого в прямокутній системі координат необхідно побудувати точки з координатами (**x_1, p_1**), (**x_2, p_2**),…, (**x_n, p_n**) і з'єднати їх відрізками прямих. Одержану фігуру називають багатокутником розподілу.

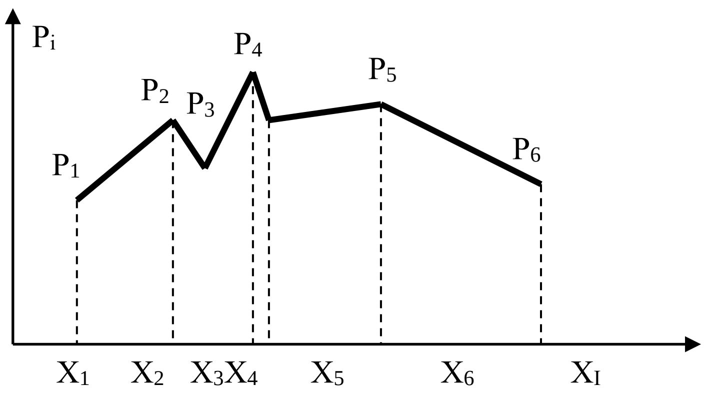

Рис.6. Багатокутник розподілу

Функція розподілу

Однією з форм закону розподілу як дискретних, так і неперервних випадкових величин є функція розподілу **F(x),** яка визначає для кожного значення **x** імовірність того, що випадкова величина X набуде значення, яке менше за **x**, тобто **F(x)=P(X<x).**

Функцію розподілу **F(x)** називають також *інтегральною функцією* розподілу**,** або *інтегральним законом* розподілу. Інтегральна функція розподілу має такі властивості:

Властивість 1. Значення функції розподілу належать відрізку [0; 1]: $0 \le F(x) \le 1$.

Властивість 2. F(x) — неспадна функція, тобто при $x_2 > x_1$, $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Наслідок 1. Імовірність того, що випадкова величина **X** набуде значення в інтервалі (**a,b**), дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі:

$$P(a<x<b)=F(b)-F(a).$$

Наслідок 2. Імовірність того, що неперервна випадкова величина **X** набуде одного (певного) значення, наприклад x_1, дорівнює нулю:

$$P(X=x_1)=0.$$

Властивість 3. Якщо всі можливі значення випадкової величини **X** належать інтервалу (**a, b**), тоді

F(x)=0, при $x \le a;$ F(x)=1, при x>b.

Наслідок 1. Якщо всі можливі значення неперервної випадкової величини розташовані на всій осі OX, то слушні такі граничні співвідношення:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Графік функції розподілу неперервної випадкової величини, побудований на основі властивостей 1-3, показано на рис. 7.

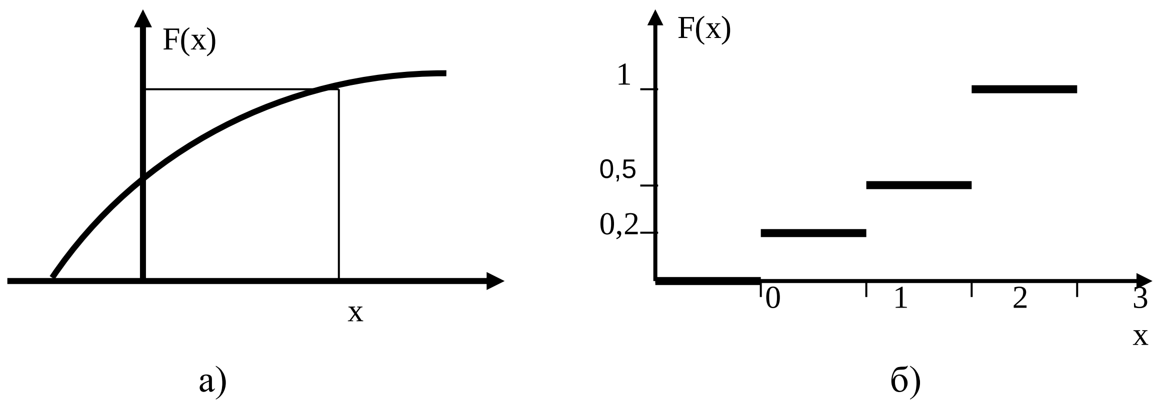

Рис. 7. Графіки інтегральної функції випадкової величини

(ліворуч – неперервної, праворуч — дискретної).

Для дискретної випадкової величини **X** функція **F(x)** дорівнює сумі ймовірностей $\mathbf{p_i}$ тих її значень $\mathbf{x_i}$, що менші за **x:** $F(x) = \sum\limits_{x_i < x} P_i .$

Наприклад, для випадкової величини **X,** заданої рядом розподілу

x_i	1	2	3
P_i	0,2	0,3	0,5

інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{якщо} \quad x \le 1 \\ 0.2 & \text{якщо} \quad 1 < x \le 2, \\ 0.5 & \text{якщо} \quad 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{якщо} \quad x > 3. \end{cases}$$

Її графіком є ступінчаста функція (рис. 2,б). У точках $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ функція **F(x)** змінюється стрибкоподібно, причому величина стрибків дорівнює ймовірностям: $p_1=0.2$; $p_2=0.3$; $p_3=0.5$.

Щільність розподілу

Однією з форм закону розподілу, що існує тільки для неперервних випадкових величин, є щільність розподілу **f(x),** яка дорівнює першій похідній функції розподілу **F(x):**

$$\mathbf{f(x) = F'(x).}$$

Функцію **f(x)** називають також *диференціальним законом* розподілу випадкової величини **X**, або *диференціальною функцією* розподілу. Щільність розподілу має такі властивості:

Властивість 1. f(x)>0. Це випливає з того, що функція розподілу **F(x)** є неспадною функцією, отже, її похідна **F'(x) = f(x)** є функцією невід'ємною. Геометрично ця властивість означає, що графік щільності розподілу (крива розподілу) розташований не нижче від осі абсцис.

Властивість 2. Невласний інтеграл від щільності розподілу в нескінченних границях дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Геометрично це означає, що повна площа, обмежена кривою розподілу та віссю абсцис, дорівнює одиниці. Зокрема, якщо всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу (**a,b**), тоді:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = 1.$$

Імовірність того, що неперервна випадкова величина **X** набуде значення, яке належить інтервалу (**a, b**), дорівнює визначеному інтегралу від щільності розподілу, узятому в межах від **a** до **b**:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = 1.$$

Знаючи **f(x),** можна знайти функцію розподілу **F(x)** за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Задачі для самостійного розв'язання

1. Дискретна випадкова величина X задана таблицею :

x	-3	-1	1	5	7
p	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

Побудувати багатокутник розподілу.

2.Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

x	-2	-1	2	5	7
p	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2

Побудувати функцію розподілу F(x) та її графік.

3.Закон розподілу неперервної випадкової величини X задано функцією розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -4; \\ \dfrac{(x+4)^2}{100}, & -4 < x \le 6; \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

Побудувати графік функції розподілу F(X) і обчислити ймовірність, що випадкова величина належить проміжку P(1<X<4).

17. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Закон розподілу є вичерпною характеристикою випадкової величини. Проте на практиці часто більш слушно описувати випадкові величини числами, що характеризують ті чи ті особливості розподілу випадкових величин (наприклад, середнє значення випадкової величини; розсіювання можливих значень випадкової величини навколо середнього значення тощо).

Нехай дискретна випадкова величина **X** набуває значень $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, …, $\mathbf{x_n}$ з імовірностями $\mathbf{p_1}$, $\mathbf{p_2}$, ..., $\mathbf{p_n}$ Знайдемо «середнє зважене» всіх можливих значень величини **X** (з «вагами» що дорівнюють імовірностям цих значень), яке характеризує положення випадкової величини на числовій осі й називається *математичним сподіванням випадкової величини* **M(X)** або $\mathbf{m_x}$:

$$M(X)=\frac{x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n}{p_1+p_2+...+p_n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_ip_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i},$$

оскільки $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$, то

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i .$$

Визначення. Математичним сподіванням *дискретної* випадкової величини **X** називається сума добутків усіх можливих значень випадкової величини на ймовірності цих значень.

Неважко переконатися в тому, що за достатньої кількості спроб математичне сподівання приблизно дорівнює середньому арифметичному значенню, яке спостерігається у випадкової величини.

Для *неперервної* випадкової величини **X** математичне сподівання виражається не сумою, а інтегралом:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx,$$

де f(x) – щільність розподілу величини **X**.

Якщо всі можливі значення неперервної випадкової величини **X** належать відрізку [a, b], тоді

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx .$$

Розглянемо без доведення деякі властивості математичного сподівання.

1. Математичне сподівання постійної величини дорівнює самій постійній величині:

$$M(C)=C .$$

2. Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M(C*X)=C*M(C).$$

3. Математичне сподівання добутку взаємно незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M\left[\prod_{i=1}^{n} X\right] = \prod_{i=1}^{n} M(X).$$

4. Математичне сподівання суми двох чи більше випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань цих величин:

$$M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n).$$

Ця властивість слушна як для незалежних, так і для залежних випадкових величин.

До характеристик положення випадкової величини, крім математичного сподівання, належать також **мода** й **медіана**.

Визначення. Модою *дискретної* випадкової величини називається її значення, яке має найбільшу ймовірність.

Визначення. Модою *неперервної* випадкової величини називається її значення, за якого щільність розподілу має максимум.

Якщо багатокутник розподілу (крива розподілу) має понад один максимум, розподіл називається *полімодальним*.

Розподіл, що має мінімум, але не має максимуму, називається *антимодальним*.

Визначення. Медіаною випадкової величини називають таке її значення, для якого слушна рівність $P(X < Me) = P(X > Me)$, тобто однаково ймовірно, буде чи ні випадкова величина **X** менша або більша за **Me** .

Якщо розподіл є модальним і симетричним, то математичне сподівання, мода й медіана збігаються.

Числовою характеристикою розсіяння можливих значень випадкової величини навколо її математичного сподівання є дисперсія.

Визначення. Дисперсією випадкової величини називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = \left[X - M(X)\right]^2.$$

Якщо **X** – *дискретна* випадкова величина, тоді

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[X_i - M(X)\right]^2 P_i ,$$

де $\mathbf{x_i}$ – можливі значення випадкової величини **X**; $\mathbf{p_i}$ – імовірності, що їм відповідають.

Для *неперервних* випадкових величин дисперсія обчислюється за формулою:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - M(x)\right]^2 f(x)dx ,$$

де f(x) – щільність розподілу.

Якщо можливі значення **X** належать відрізку **[a, b]**, тоді

$$D(X) = \int_{a}^{b} \left[x - M(x)\right]^2 f(x)dx .$$

Дисперсією як дискретних, так і неперервних випадкових величин більш слушно обчислювати за формулою:

$$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2 ,$$

де $M(X^2)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$, якщо **X** – *дискретна* випадкова величина, і

$M(X^2)=\int_a^b x^2 f(x)dx$, якщо **X** – *неперервна* випадкова величина.

Дисперсія має вимірність квадрата випадкової величини, що часто робить її незручною для практичного застосування. Тому величину розсіяння можливих значень випадкової величини навколо середнього можна охарактеризувати середньоквадратичним відхиленням:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\ ,$$

розмірність якого збігається з розмірністю випадкової величини.

Поняття початкових і центральних моментів випадкової величини

Узагальненням основних числових характеристик випадкових величин є поняття моментів випадкової величини (початкових і центральних) .

Визначення. Початковим моментом **k**-го степеня випадкової величини **X** є математичне сподівання **k**-го степеня цієї випадкової величини:

$$V_k = M(X^k)\ .$$

Якщо **X** – *дискретна* випадкова величина, тоді

$$V_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i\ .$$

Якщо **X** – *неперервна* випадкова величина, тоді

$$V_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx\ .$$

Математичне сподівання **X** – це початковий момент першого порядку:

$$\mathbf{v_1=M(X)}.$$

Визначення. Центрованою випадковою величиною, яка відповідає величині **X**, називається відхилення випадкової величини **X** від її математичного сподівання:

$$\overset{o}{X} = X - M(X).$$

Моменти центрованої випадкової величини називаються центральними моментами.

Визначення. Центральним моментом **k**-го порядку випадкової величини **X** є математичне сподівання **k**-го степеня відповідної центрованої випадкової величини:

$$\mu_k = M(\overset{o}{X}{}^k) = M[X - M(X)]^k.$$

$$\mu_1 = M(\overset{o}{X}) = M[X - M(X)] = 0,$$

зокрема,

$$\mu_2 = M(\overset{o}{X}{}^2) = M[X - M(X)]^2 = D(X),$$

тобто дисперсія випадкової величини **X** є центральним моментом другого порядку.

Якщо **X** – *дискретна* величина, тоді

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^k p_i.$$

Якщо **X** – *неперервна* випадкова величина, тоді

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^k f(x)dx.$$

Застосовуючи властивості математичного сподівання, можна одержати співвідношення, що зв'язують початкові й центральні моменти:

$$\mu_2 = V_2 - V_1;$$

$$\mu_3 = V_3 - 3V_1V_2 + 2V_1^3;$$

$$\mu_4 = V_4 - 4V_3V_1 + 6V_2V_1^2 - 3V_1^4.$$

Моменти вищих порядків застосовуються рідко.

Центральний момент третього порядку слугує для характеристики асиметрії розподілу.

Визначення. *Асиметрією* розподілу називається відношення центрального моменту третього порядку до куба середньоквадратичного відхилення:

$$A_n = \mu_3 / \sigma^3$$

Центральний момент четвертого порядку слугує для характеристики гостровершинності або плосковершинності (*крутизни*) розподілу. Такою характеристикою є ексцес, що визначається рівністю:

$$E_k = \mu_4 / \sigma^4 .$$

Розглянуті моменти називаються теоретичними моментами.

На практиці часто потрібно оперувати нормованими випадковими величинами.

Визначення. Нормованою випадковою величиною (**T**) називають центровану випадкову величину, виражену в частинах середньоквадратичного відхилення

$$T = \frac{\overset{o}{X}}{\sigma(X)} = \frac{X - M(X)}{\sigma(X)} .$$

Математичне сподівання нормованої випадкової величини **M(T)** дорівнює нулю, а дисперсія **D(T)** дорівнює одиниці.

Задачі для самостійного розв'язання

1.Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

x	-2	-1	2	5	7
p	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2

Обчислити математичне сподівання.

2.За заданою функцією щільності ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{\sqrt{x+2}}{36}+\dfrac{x^2-4}{162}, & -2<x\le 7;\\ 0, & x>7\end{cases}$$

обчислити математичне сподівання.

3.За заданою функцією розподілу ймовірностей

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ \dfrac{\sqrt{x-2}}{2}, & -2<x\le 6;\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

обчислити математичне сподівання.

4.За заданою щільністю ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -4;\\ a\,(x+4)(x-5), & -4<x\le 5;\\ 0, & x>5.\end{cases}$$

Знайти параметр a , щільність ймовірностей F(x), моду Mo.

5. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

x	-2	-1	2	5	7
p	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2

Обчислити дисперсію D(X) та середнє квадратичне відхилення σ (x).

18. ДЕЯКІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

18.1. Закони розподілу дискретних випадкових величин

Біноміальний розподіл

Біноміальним називають розподіл імовірностей дискретної випадкової величини **X** – кількості появи події **A** в **n** незалежних випробовуваннях, у кожному з яких імовірність появи події постійна й дорівнює **p**, що визначаються за формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

де **k**=0, 1, 2, … , n; $\mathbf{P_n(k)}$ – імовірність того, що подія **A** в **n** незалежних випробовуваннях станеться рівно **k** разів; **q**=1-**p** – імовірність непояви події **A** в кожному випробовуванні;

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$ (кількість сполучень з **n** елементів по **k**).

Біноміальний закон розподілу можна подати як таблицю:

Таблиця 6

X	0	1	2	…	k	…	N
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	$C_n^n p^n q^0$

Математичне сподівання випадкової величини **X**, що підлягає біноміальному законові розподілу, дорівнює добутку кількості випробовувань **n** на ймовірність **p** появи події в кожному випробовуванні:

M(X)=np.

Дисперсія й середньоквадратичне відхилення біноміального розподілу визначаються за формулами:

$$D(X) = npq; \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

Показники асиметрії та ексцесу для біноміального розподілу мають вигляд:

$$A_S = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}; \quad E_k = \frac{1-\sigma pq}{npq}.$$

Розподіл Пуассона

Пуассонівським називають розподіл імовірностей дискретної випадкової величини **X** – числа появи події в **n** незалежних випробовуваннях (**n** достатньо велике), у кожному з яких імовірність появи події постійна й дорівнює **p** (**p**≤0,1), що визначається за асимптотичною формулою Пуассона:

$$P(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

де λ=**np** – середня кількість появи події в n випробовуваннях;
k=0, 1, 2, … , **n** – кількість появи події в **n** незалежних випробуваннях. Цей розподіл залежить від одного параметра **λ**.

Закон Пуассона в табличній формі має вигляд:

Таблиця 7

X	0	1	2	…	k	…	n
P	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$

Особливістю розподілу Пуассона є рівність математичного сподівання й дисперсії:

M(X)=D(X)=np=λ.

Показники асиметрії та ексцесу мають вигляд:

$$A_S = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}; \quad E_k = \frac{1}{\lambda}.$$

18.2. Закони розподілу неперервних випадкових величин

Показниковий розподіл

Показниковим (експоненціальним) називають розподіл імовірностей неперервної випадкової величини **X**, описаної диференціальною функцією:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \textit{якщо} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

де $\boldsymbol{\lambda}$ – постійна додатна величина.

Показниковий розподіл визначається одним параметром λ. Інтегральна функція показникового розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \textit{якщо} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Математичне сподівання показникового розподілу дорівнює зворотній величині параметра λ:

$$M(X) = 1/\lambda$$

Дисперсія показникового розподілу

$$D(X) = 1/\lambda^2 .$$

Середнє квадратичне відхилення дорівнює математичному сподіванню:

$$\sigma(X) = M(X) = 1/\lambda$$

Показники асиметрії та ексцесу показникового розподілу за будь-якого значення параметра $\boldsymbol{\lambda}$ мають постійні значення: **As**=2; **Ek**=9.

Показниковий розподіл широко застосовують у додатках, зокрема в теорії надійності[10].

Рівномірний розподіл

Рівномірним називають розподіл імовірностей неперервної випадкової величини **X**, якщо на інтервалі **(a, b)**, якому належать всі можливі значення **X**, щільність розподілу зберігає постійне значення

$$f(x)=\frac{1}{b-a},$$

поза цим інтервалом f(x)=0.

Диференціальна та інтегральна функції рівномірного розподілу мають вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x<a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо } a\le x\le b,\\ 0, & \text{якщо } x>b;\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{якщо } a\le x\le b,\\ 1, & \text{якщо } x>b;\end{cases}$$

Математичне сподівання рівномірно розподіленої випадкової величини **X**

$$M(X)=(a-b)/2.$$

Дисперсія випадкової величини **X**

$$D(X)=(b-a)^2/12.$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X)=(b-a)/2\sqrt{3}.$$

Через симетричність рівномірного розподілу

As=0, **Me** =**M(X)** =**(a+b)**/2;

коефіцієнт ексцесу **E**=-1, 2; моди рівномірний розподіл не має.

Нормальний розподіл

Нормальним називають розподіл імовірностей неперервної випадкової величини **X**, якщо диференціальна функція має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нормальний розподіл визначається двома параметрами: **a** – математичне сподівання; σ – середнє квадратичне відхилення. Графік диференціальної функції нормального розподілу, що має назву нормальної кривої (кривої Гауса), розташований над віссю абсцис, симетрично до прямої **x=a**; якщо **x=a,** функція f(x) має максимум, який дорівнює $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Точки графіка $\left(a-\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ і $\left(a+\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ – точки перетину; якщо $x \to \pm\infty$ крива асимптотично наближається до осі абсцис (рис. 3).

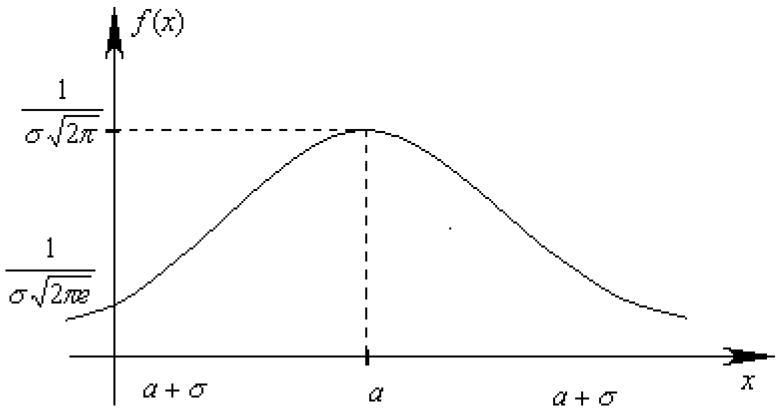

Рис. 8. Нормальна крива Гауса

Розташування нормальної кривої осі абсцис змінюється зі зміною параметра а; форма нормальної кривої змінюється, якщо змінюється параметр σ (зі зростанням σ максимальна ордината кривої зменшується, а сама крива стає більш пологою; зі зменшенням крива стає більш «гострою»).

Асиметрія, ексцес, мода, медіана нормального розподілу відповідно дорівнюють

$$A_S = 0; \; E_k = 0; \; M_0 = a; \; Me = a.$$

Нормованим називається нормальний розподіл з параметрами а=0, σ=1[9].

Диференціальна функція нормованого розподілу має вигляд:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ця функція є табульованою.

На практиці часто потрібно обчислювати ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина **X** набуде значення, яке належить інтервалу (α,β), з застосуванням рівності

$$P(\alpha < X < \beta) = \phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}),$$

де $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функція Лапласа, значення якої знаходить за таблицею (див. додаток № 2), причому в таблиці наведені значення **Ф(x)** для $0 \le x \le 5$, для $x<0$ застосовують ту саму таблицю (функція **Ф(x)** непарна, тобто **Ф(-x)**= **— Ф(x),** для $x>5$ можна взяти **Ф(x)**=0,5).

Імовірність відхилення нормально розподіленої випадкової величини **X** від її математичного сподівання **a** на величину, меншу від заданого числа δ, визначають, застосовуючи рівність:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\phi(\frac{\delta}{\sigma}).$$

Поклавши δ=σt, одержимо

$$P(|X - a| < \sigma t) = 2\Phi(t).$$

Якщо **t**=3 маємо

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 2 * 0.49865 = 0.9973$$

Тобто, можна вважати практично достовірною подію, що випадкова величина **X**, розподілена за нормальним законом, набуває значення на інтервалі (a-3σ, a+3σ). У цьому суть правила трьох сигм: *якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевищує потроєного середнього квадратичного відхилення*.

Це правило можна застосувати, коли необхідно визначити, чи має випадкова величина, що вивчається, нормальній розподіл[11]. Якщо зазначена в правилі умова виконується, то випадкова величина розподілена нормально, а інакше розподіл випадкової величини нормальним не буде.

Якщо про розподіл випадкової величини невідомо нічого, крім діапазону її випадкових відхилень, то на підставі правила трьох сигм, можна орієнтовно оцінити середнє квадратичне відхилення: треба взяти максимальне практично можливе відхилення випадкової величини від її середнього значення й поділити це відхилення на 3. Особливість нормального закону розподілу полягає в тому, що він є граничним для інших законів розподілу.

Розподіл χ^2

Нехай $X_i (i = 1,2,...,n)$ – нормальні незалежні випадкові величини, кожна з яких має нульове математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення дорівнює 1.

Розглянемо випадкову величину Y, яку визначаємо так:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 .$$

Тоді **Y** підлягає розподілу χ^2 («хі квадрат») з **k=n** ступенями свободи.

Диференціальна функція цього розподілу має вигляд:

$$f = \begin{cases} 0, & ,\text{якщо} \quad x \le 0, \\ \dfrac{1}{2^{k/2}\Gamma(\frac{\kappa}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\left(\frac{k}{2}\right)-1} & ,\text{якщо} \quad x > 0. \end{cases}$$

де **Γ(n)** – гама-функція:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx .$$

Якщо n>2, для визначення значень функції застосовують співвідношення

$$\Gamma(n)=(n-1)\Gamma(n-1);$$

де Γ_{n-1}=(n-1)!, якщо **n** ціле додатне число.

Розподіл χ^2 визначається одним параметром (кількістю ступенів свободи **k**).

Математичне сподівання розподілу χ^2 з **k** ступенями свободи дорівнює **k**, дисперсія – 2**k**. Розподіл не є симетричним.

Зі збільшенням кількості ступенів свободи йде повільне наближення розподілу до нормального.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Ймовірність появи події А в будь-якому випробуванні однакова і дорівнює 0,25. Відомо, що математичне сподівання випадкової величини Х – кількості разів появи події А - дорівнює М(х) = 2. Визначити середнє квадратичне відхилення випадкової величини.
2. Дилер фірми постачає покупцям прилади, ймовірність дефекту в кожному з яких дорівнює 0,002. Знайти дисперсію кількості приладів з дефектом у партії із 1500 приладів.
3. Відомі математичне сподівання а=15 та середнє квадратичне відхилення σ = 14 випадкової величини Х, яка розподілена нормально. Обчислити ймовірність того, що ця випадкова величина прийме значення, які належать інтервалу (0;30).
4. Щільність розподілу f(x) має вигляд (рис.9):

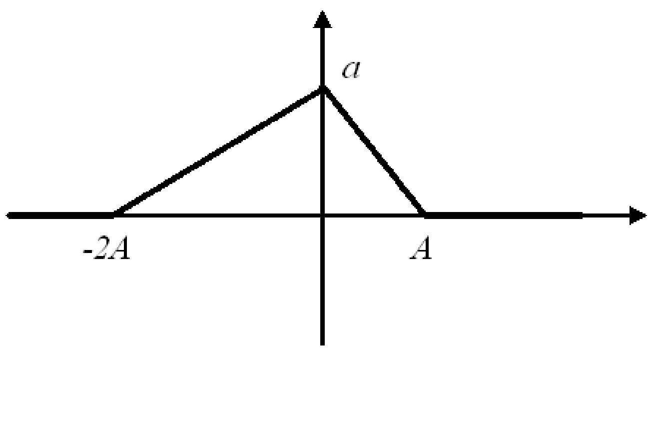

Рис. 9. Щільність розподілу f(x)

a= 1/6. Знайти А, F(x), графік F(x), M(x), D(x), σ(x).

19. ПОНЯТТЯ ПРО ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

Теорія ймовірностей узагальнює реальні властивості випадкових явищ і величин. Важливим у процесі узагальнення є вираження об'єктивних закономірностей у вигляді закону великих чисел [10].

Нерівність Чебишева

Для будь-якої випадкової величини **X**, що має кінцеву дисперсію, і для будь-якого ε>0

$$P\{|X - M(X)| \geq \varepsilon\} < \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

або

$$P\{|X - M(X)| < \varepsilon\} < 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Нерівність Чебишева дозволяє оцінювати ймовірність відхилення випадкової величини X від свого математичного сподівання, знаючи лише D(X). Ця нерівність є надто корисною в різних теоретичних дослідженнях [12].

Застосовуючи поняття випадкової величини, математичного сподівання і дисперсії, П. Л. Чебишев сформулював, а А. А. Марков доповнив закон великих чисел.

Визначення. Кажуть, що послідовність випадкових чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, які мають математичні сподівання $M(X_1), M(X_2), ..., M(X_n)$, підлягає закону великих чисел, якщо середньоарифметичне цих випадкових величин

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i ,$$

якщо n→∞ з імовірністю, що необмежено наближається до 1, скільки завгодно мало (менше ніж на ε>0) відрізняється від середньоарифметичного їх математичних сподівань, тобто при n→∞:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|<\varepsilon\right\}\to 1. \quad (*)$$

Загальні умови, які повинні задовольняти випадкові величини $x_1, x_2, ..., x_n$, достатні для більшості практичних випадків, знайшов П. Л. Чебишев, а після цього ще більше поширив А. А. Марков. Стисло вони формулювалися так.

Теорема Чебишева

*Я*кщо величини $x_1, x_2, ..., x_n$ є попарно незалежними та їх дисперсії $D(X_i)$ обмежені, тобто $D(X_i) \le C$, де С – деяке число, незалежне від **n**, тоді гранична рівність (*) виконується, тобто для $x_1, x_2, ..., x_n$ закон великих чисел є вірним.

Теорема Бернуллі

Нехай проводяться **n** випробовувань, у кожному з яких подія **A** може з'явитися з тією самою імовірністю **p**. Позначимо через x_i кількість появи події **A** в і-ому випробовуванні. Можливі значення x_i: $x_1 = 1$, якщо подія **A** сталася, і $x_i = 0$, якщо А не сталася в цьому випробуванні. Сума $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$ є кількість появи події **A** в **n** випробовуваннях. Тоді

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{m}{n}; \quad M(X_i)=1p+0(1-p)p;$$

$$\sum_{i=1}^{n}M(X_i)=np; \quad D(X_i)=pq\le\frac{1}{4}.$$

Можна довести, що якщо **p**+**q**=1, то **pq**=1/4.

Умови обмеженості дисперсії виконані. Тому до випадкової величини Х можна застосувати закон великих чисел. Підставляючи в (*) замість $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ число **m/n** і замість $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)$- число **np**, одержимо:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\to 1 \text{ при } n\to\infty,$$

тобто з імовірністю, як завгодно близькою до одиниці, можна стверджувати: якщо кількість випробовувань $n\to\infty$, відносна частота появи події в одному випробовуванні скільки завгодно мало відхиляється від її імовірності. Це і є доведення теореми Бернуллі як окремого випадку закону великих чисел, сформульованого П.Л.Чебишевим.

Закон великих чисел має важливе практичне значення. Саме на цьому законі базується твердження, що середньо арифметичне значення вважається найбільш точним, найближчим до дійсного значення величини, що вимірюється. Закон великих чисел широко застосовується в статистиці, на ньому базується вибірковий метод, що вивчається в курсі математичної статики.

Задачі для самостійного розв'язання

1.Завод випускає 90% виробів першого сорту і 10% виробів другого сорту. Навмання вибирають 1000 виробів. Знайти ймовірність того, що число виробів першого сорту опиниться в межах від 900 до 940.

2. Імовірність попадання в ціль при одному пострілі рівна 0,7. Скільки потрібно зробити пострілів, щоб з імовірністю, не меншою 0,96; можна було стверджувати, що відхилення частоти попадання в ціль від імовірності тієї ж події буде не більше 0,01?

3. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

x	0,3	0,6
p	0,2	0,8

Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X-M(X)| < 0,2$.

Додаток 1

Таблиця значень функції $\varphi(X) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061

2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0024
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$

x	Φ(x)	X	Φ(x)	X	Φ(x)	X	Φ(x)
0,00	0,0000	0,30	0,1179	0,60	0,2257	0,90	0,3159
0,01	0,0040	0,31	0,1217	0,61	0,2291	0,91	0,3186
0,02	0,0080	0,32	0,1255	0,62	0,2324	0,92	0,3212
0,03	0,0120	0,33	0,1293	0,63	0,2357	0,93	0,3238
0,04	0,0160	0,34	0,1331	0,64	0,2389	0,94	0,3264
0,05	0,0199	0,35	0,1368	0,65	0,2422	0,95	0,3289
0,06	0,0239	0,36	0,1406	0,66	0,2454	0,96	0,3315
0,07	0,0279	0,37	0,1443	0,67	0,2486	0,97	0,3340
0,08	0,0319	0,38	0,1480	0,68	0,2517	0,98	0,3365
0,09	0,0359	0,39	0,1517	0,69	0,2549	0,99	0,3389
0,10	0,0398	0,40	0,1554	0,70	0,2580	1,00	0,3413
0,11	0,0438	0,41	0,1591	0,71	0,2611	1,01	0,3438
0,12	0,0478	0,42	0,1628	0,72	0,2642	1,02	0,3461
0,13	0,0517	0,43	0,1664	0,73	0,2673	1,03	0,3485
0,14	0,0557	0,44	0,1700	0,74	0,2703	1,04	0,3508
0,15	0,0596	0,45	0,1736	0,75	0,2734	1,05	0,3531
0,16	0,0636	0,46	0,1772	0,76	0,2764	1,06	0,3554
0,17	0,0675	0,47	0,1808	0,77	0,2794	1,07	0,3577
0,18	0,0714	0,48	0,1844	0,78	0,2823	1,08	0,3599
0,19	0,0753	0,49	0,1879	0,79	0,2852	1,09	0,3621
0,20	0,0793	0,50	0,1915	0,80	0,2881	1,10	0,3643
0,21	0,0832	0,51	0,1950	0,81	0,2910	1,11	0,3665

0,22	0,0871	0,52	0,1985	0,82	0,2939	1,12	0,3686
0,23	0,0910	0,53	0,2019	0,83	0,2967	1,13	0,3708
0,24	0,0948	0,54	0,2054	0,84	0,2995	1,14	0,3729
0,25	0,0987	0,55	0,2088	0,85	0,3023	1,15	0,3749
0,26	0,1026	0,56	0,2123	0,86	0,3051	1,16	0,3770
0,27	0,1064	0,57	0,2157	0,87	0,3078	1,17	0,3790
0,28	0,1103	0,58	0,2190	0,88	0,3106	1,18	0,3810
0,29	0,1141	0,59	0,2224	0.89	0,3133	1,19	0,3830
1,20	0,3849	1,55	0,4394	1,90	0,4713	2,50	0,4938
1,21	0,3869	1,56	0,4406	1,91	0,4719	2,52	0,4941
1,22	0,3883	1,57	0,4418	1,92	0,4726	2,54	0,4945
1,23	0,3907	1,58	0,4429	1,93	0,4732	2,56	0,4948
1,24	0,3925	1,59	0,4441	1,94	0,4738	2,58	0,4951
1,25	0,3944	1,60	0,4452	1,95	0,4744	2,60	0,4953
1,26	0,3962	1,61	0,4463	1,96	0,4750	2,62	0,4956
1,27	0,3980	1,62	0,4474	1,97	0,4756	2,64	0,4959
1,28	0,3997	1,63	0,4484	1,98	0,4761	2,66	0,4961
1,29	0,4015	1,64	0,4495	1,99	0,4767	2,68	0,4963
1,30	0,4032	1,65	0,4505	2,00	0,4772	2,70	0,4965
1,31	0,4049	1,66	0,4515	2,02	0,4783	2,72	0,4967
1,32	0,4066	1,67	0,4525	2,04	0,4793	2,74	0,4969
1,33	0,4082	1,68	0,4535	2,06	0,4803	2,76	0,4971
1,34	0,4099	1,69	0,4545	2,08	0,4812	2,78	0,4973
1,35	0,4115	1,70	0,4554	2,10	0,4821	2,80	0,4974
1,36	0,4131	1,71	0,4564	2,12	0,4830	2,82	0,4976
1,37	0,4147	1,72	0,4573	2,14	0,4838	2,84	0,4977
1,38	0,4162	1,73	0,4582	2,16	0,4846	2,86	0,4979
1,39	0,4177	1,74	0,4591	2,18	0,4854	2,88	0,4980
1,40	0,4192	1,75	0,4599	2,20	0,4861	2,90	0,4981
1,41	0,4207	1,76	0,4608	2,22	0,4868	2,92	0,4982
1,42	0,4222	1,77	0,4616	2,24	0,4875	2,94	0,4984
1,43	0,4236	1,78	0,4625	2,26	0,4881	2,96	0,4985
1,44	0,4251	1,79	0,4633	2,28	0,4887	2,98	0,4986
1,45	0,4265	1,80	0,4641	2,30	0,4893	3,00	0,49865
1,46	0,4279	1,81	0,4649	2,32	0,4898	3,20	0,49931
1,47	0,4292	1,82	0,4656	2,34	0,4904	3,40	0,49966
1,48	0,4306	1,83	0,4664	2,36	0,4909	3,60	0,499841
1,49	0,4319	1,84	0,4671	2,38	0,4913	3,80	0,499928
1,50	0,4332	1,85	0,4678	2,40	0,4918	4,00	0,499968
1,51	0,4345	1,86	0,4686	2,42	0,4922	4,50	0,499997
1,52	0,4357	1,87	0,4693	2,44	0,4927	5,00	0,49999997
1,53	0,4370	1,88	0,4699	2,46	0,4931	∞	0,5
1,54	0,4382	1,89	0,4706	2,48	0,4934		

Перелік посилань

1. Бідюк П.І., Ткач Б.П., Харрінгтон Т. Математична статистика: Навч. посіб. — К.: Персонал, 2018. —348 с.
2. Боровков А.А. Теория вероятностей. — М. : Наука, 1999. — 431с.
3. Брановицька С.В., Медведєв Р.Б., Фіалков Ю.Я. Обчислювальна математика та програмування: Обчислювальна математика в хімії і хімічній технології: Підручник.-К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», ТОВ «Фірма «Періодика», 2004.-220с:іл.
4. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. — К.: В. школа. Головное изд-во, 1979. — 408с.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. 12-е изд. — М.: В. школа, 2019. — 479с.
6. Гнєденко Б.В. Курс теорії ймовірностей: Підручник. — К.: Київський університет, 2010. — 464 с.
7. Донченко В.С., Сидоров М.В.-С. Теорія ймовірностей та математична статистика: Навч. посібн. — К.: Київський університет, 2015. — 400 с.
8. Джавала Л.Л., Слюсарчук Ю.М., Хром'як Й.Я., Цимбал В.М. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси: Навч. посіб. — Львів: Вид-во Львів. політехніки, 2015. — 364 с.
9. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных. — М.: Мир, 1980. — 510 с.
10. Лебєдєв Є.О., Лівінська Г.В., Розора І.В., Шарапов М.М. Математична статистика: Навч посіб. — К.: Київський університет, 2016. — 159 с.
11. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. — М.: Физматлит, 2006. — 816 с.
12. Сидоренко Е.В. Методы математической обработки в психологии. — СПб: Речь, 2010. — 350 с.